

ELECTRONIQUE ET MATHÉMATIQUES

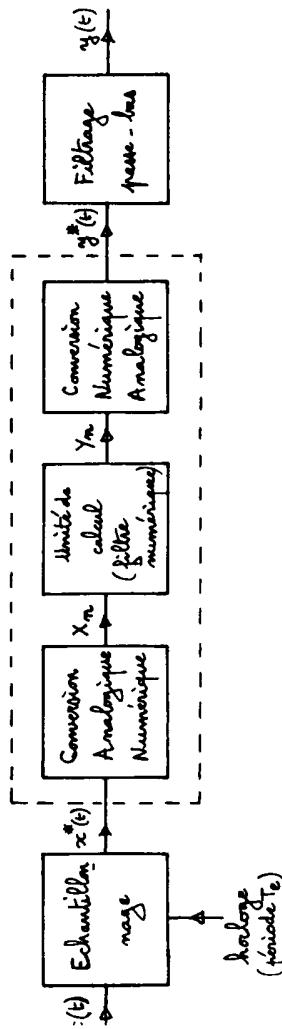
Deuxième partie

Durée : 2 h 30 + 30 min de lecture du sujet

Aucun document n'est autorisé

ETUDE D'UN SYSTEME DE FILTRAGE NUMERIQUE

Un système de filtrage numérique, opérant sur un signal analogique $x(t)$ se ramène au schéma fonctionnel suivant :



- L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs du signal $x(t)$ à des instants multiples entiers de la période d'horloge. Soit $x(nT_e)$, la valeur analogique de l'échantillon pris à l'instant $t = nT_e$. L'ensemble de ces échantillons constitue le signal $x^*(t)$.

- Chaque échantillon est ensuite traduit dans une représentation numérique adaptée à l'unité de calcul. On notera X_n le nombre binaire associé à la valeur analogique $x(nT_e)$.

- L'unité de calcul effectue un algorithme qui, à partir de la suite des nombres X_n (définis précédemment) crée une suite de nouveaux nombres appelés Y_n .

- Ces nombres Y_n , convertis en grandeur analogique, permettent de définir le signal $y^*(t)$ formé des échantillons $y(nT_e)$.

- Après filtrage passe-bas du signal $y^*(t)$, on obtient le signal analogique de sortie $y(t)$.

Le but du problème est d'étudier les caractéristiques de $y(t)$ sachant que $x(t)$ est un signal analogique sinusoïdal.

$$x(t) = X \sin \omega t = X \sin(2\pi f t)$$

1 - ETUDE DU SYSTEME DANS LE CAS OU L'UNITE DE CALCUL EFFECTUE L'ALGORITHME $Y_n = X_n$:

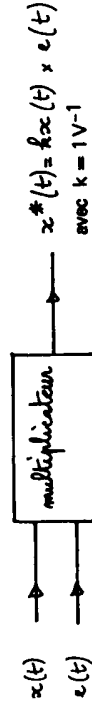
Le traitement numérique étant réduit à l'égalité $Y_n = X_n$, le schéma fonctionnel est alors le suivant :



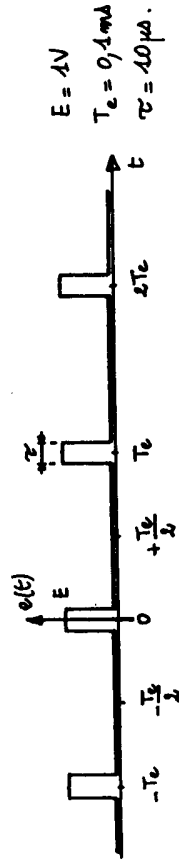
Grâce à cette structure simplifiée, ne restant à analyser que les fonctions échantillonnage et filtrage passe-bas.

1-1 - Echantillonnage :

La prise d'échantillons est réalisée selon le principe suivant.



Le signal $x(t)$ est sinusoïdal, d'amplitude $X = 2V$ et de fréquence $f = 833 \text{ Hz}$. $e(t)$ est le signal d'échantillonnage de période $T_e = \frac{1}{F_e}$ défini par :



1-a : Représenter, sur une feuille ci-jointe (où figure $x(t)$) les signaux $e(t)$ et $x^*(t)$ (en respectant la concordance des temps).

1-b : e(t) est un signal périodique, et est décomposable en série de Fourier.

— Justifier qualitativement que e(t) peut s'écrire :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos n \omega_e t \quad \omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$$

— Trouver l'expression littérale de E₀ puis calculer sa valeur numérique.

1-c : Connaissant la décomposition de e(t), exprimer x*(t) sous forme d'une somme de fonctions sinusoïdales.

1-d : En se limitant aux trois premières raies et sachant que E₁ = 0,2 V, représenter le spectre en fréquence de x*(t).

1-2. Filtrage passe-bas :

Sachant que y*(t) = x*(t), on souhaite obtenir y(t) image parfaite de x(t), soit :

$$y(t) = Y \sin \omega t = k X \sin \omega t.$$

Pour ne conserver que la raie de fréquence f, on réalise un filtrage passe-bas.

2-a : En raisonnant sur un filtre passe-bas idéal, trouver, en fonction de f, la valeur minimale de la fréquence F_e d'échantillonnage.

2-b : Une première approche de ce filtre consiste à utiliser un circuit passe-bas du 1^{er} ordre de fréquence de coupure f_c.

— Donner la transmittance d'un tel filtre. Tracer son diagramme de Bode (diagrammes asymptotiques et courbes réelles des courbes de gain et de phase).

— Comment choisir f_c par rapport à f₁ = 833 Hz ? Justifier l'inégalité proposée.

Comment choisir f_c par rapport à f₂ = 9167 Hz (et f₃ = 10833 Hz) ? Justifier l'inégalité proposée.

Ces deux inégalités sont-elles compatibles ? Conclure sur l'utilisation d'un tel filtre. Quelles solution(s) suggérez-vous ?

Dans la suite du problème, le filtre passe-bas sera supposé idéal. Dans le cas particulier où l'algorithme est l'égalité Y_n = X_n, la sortie y(t) est donc rigoureusement proportionnelle à l'entrée x(t). La deuxième partie du problème met en évidence les modifications sur y(t) apportées par l'exécution d'un algorithme différent.

II - ETUDE DU SYSTEME DANS LE CAS OU L'UNITE DE CALCUL EFFECTUE L'ALGO-

$$\text{RITHME } Y_n = \frac{X_n + X_{n-1}}{2}$$

On rappelle que X_n est le nombre binaire associé à la valeur de x(t) = X sin ωt prise à l'instant particulier t = n T_e.

$$X_n \longleftrightarrow x(n T_e) = X \sin(n \omega T_e)$$

Dès l'apparition du nombre X_n à l'instant t = n T_e, le calculateur fournit immédiatement le nom-

$$\text{bre } Y_n = \frac{X_n + X_{n-1}}{2}. \text{ La conversion du nombre } Y_n \text{ en la grandeur analogique } y(n T_e) \text{ est instan-}$$

tanée.

11-1 : Etablir l'expression de y(n T_e). Montrer que celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$y(n T_e) = Y \sin[n\omega T_e + \varphi]$$

Donner les expressions littérales de Y et φ en fonction de X, f et F_e.

11-2 : L'échantillonnage de x(t) = X sin ωt (X = 2V, f = 833 Hz) à lieu comme indiqué dans la première partie, aux instants ... 0, T_e, 2T_e ... nT_e ... pendant un temps τ considéré très court devant T_e (T_e = 0,1 ms). Dans ces conditions, on admet que x(t) est constant et égal à x(nT_e) sur l'intervalle [nT_e - $\frac{\tau}{2}$, nT_e + $\frac{\tau}{2}$].

2-a : Calculer les valeurs de y(nT_e) pour n variant de 0 à 6.

2-b : En extrapolant les résultats ci-dessus, représenter sur la feuille jointe, y*(t) pour 0 ≤ t ≤ 1,2 ms.

2-c : La reconstitution du signal analogique y(t) à partir du signal y*(t) formé des échantillons y(nT_e) étant idéale, montrer qualitativement ou graphiquement que :

$$y(t) = X \cos\left(\pi \frac{f}{F_e} t\right) \sin\left(\omega t - \pi \frac{f}{F_e}\right)$$

En déduire la modification produite sur x(t) par le filtrage numérique.

11-3 : x(t) est maintenant un signal sinusoïdal d'amplitude constante et de fréquence variant de

$$0 \text{ à } \frac{F_e}{2}$$

3-a : Justifier la valeur limite f_{max} = $\frac{F_e}{2}$

3-b : Réponse en fréquence du filtre numérique

— représenter, en échelle linéaire, l'évolution de T = $\frac{Y}{X}$, et de φ pour f variant de

O à fmax (on calculera T pour les fréquences particulières : $0, \frac{F_e}{10}, \frac{F_e}{5}, \frac{F_e}{4}, \frac{F_e}{3}, \frac{F_e}{2}$)
(utiliser la feuille jointe).

- Quelle est la bande passante à -3 dB ?
- Pour des signaux dont le spectre s'étend de 0 à $\frac{F_e}{10}$, quelle est la fonction réalisée par le filtre numérique ?

On rappelle les transformations trigonométriques :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a+b) + \sin (a-b)]$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$