A : Etude de l'élément inductif

A.1 : l'expression $u_D(M,t) = U_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ met en évidence 2 phénomènes :
- la propagation d'un signal
- l'absence de pertes (U_0 constant)

le retard angulaire de $u_D(M,t)$ sur $u_D(A,t)$ est donné par.

$$\psi = 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

λ représente la longueur d'onde associée à la propagation.

A.2 a au point B, la tension et le courant vérifient la loi d'Ohm à chaque instant, soit $\underline{U}(B) = \underline{Z}\ \underline{I}(B)$

on a : $\underline{U}(B) = \underline{U}_D(B) + \underline{U}_R(B)$ (1)

et $\underline{I}(B) = \underline{I}_D(B)$ et $\underline{I}_R(B)$ (2)

on donne dans l'énoncé : $\underline{U}_R(B) = -R_C \underline{I}_R(B)$

et $\underline{U}_D(B) = R_C \underline{I}_D(B)$

(2) s'écrit alors $\underline{I}(B) = \frac{1}{R_C}\left[\underline{U}_D(B) - \underline{U}_R(B)\right]$

soit en multipliant par $\underline{Z}$: $\underline{U}(B) = \underline{Z}\,\underline{I}(B) = \frac{\underline{Z}}{R_C}\left[\underline{U}_D(B) - \underline{U}_R(B)\right]$

cette dernière relation s'égale avec l'expression (1)

on trouve $\underline{U}_D(B) + \underline{U}_R(B) = \frac{\underline{Z}}{R_C}\left[\underline{U}_D(B) - \underline{U}_R(B)\right]$

après transformation, on obtient :

$$\underline{U}_R(B) = \frac{\underline{Z} - R_C}{\underline{Z} + R_C}\ \underline{U}_D(B).$$

CQFD.

A.2 b l'onde réfléchie se propage de B vers A.

la distance BM vaut $l - x$. d'où le retard $\psi' = 2\pi \frac{l-x}{\lambda}$

par analogie avec l'expression de $\underline{U}_D(M)$ en fonction de $\underline{U}_D(A)$

on écrira : $\underline{U}_R(M) = \underline{U}_R(B) \exp\left(-j\, 2\pi \frac{l-x}{\lambda}\right)$

A.3

$$\underline{U}(M) = \underline{U}_D(M) + \underline{U}_R(M)$$

et

$$\underline{I}(M) = \frac{\underline{U}_D(M)}{R_C} - \frac{\underline{U}_R(M)}{R_C}$$

on donne dans l'énoncé : $\underline{U}_D(M) = U_0 \exp\left(-j\, 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$

quant à $\underline{U}_R(M)$ on écrira.

$\underline{U}_R(M) = \underline{U}_R(B) \exp\left(-j\, 2\pi \frac{l-x}{\lambda}\right)$ d'après la question A_3

$\underline{U}_R(M) = \underline{U}_D(B) \frac{\underline{Z} - R_C}{\underline{Z} + R_C} \exp\left(-j\, 2\pi \frac{l-x}{\lambda}\right)$ " " . A_2

$= U_0 \exp\left(-j\, 2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \frac{\underline{Z} - R_C}{\underline{Z} + R_C} \exp\left(-j\, 2\pi \frac{l-x}{\lambda}\right)$

d'où les résultats. $\underline{U}(M) = U_0\left[\exp\left(-j\, 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\underline{Z} - R_C}{\underline{Z} + R_C} \exp\left(-j\, 2\pi \frac{2l-x}{\lambda}\right)\right]$

et $\underline{I}(M) = \frac{U_0}{R_C}\left[\exp\left(-j\, 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) - \frac{\underline{Z} - R_C}{\underline{Z} + R_C} \exp\left(-j\, 2\pi \frac{2l-x}{\lambda}\right)\right]$

A.4 : si M est en A, $x = 0$.

on écrira : $\underline{U}(A) = U_0\left[1 + \frac{\underline{Z} - R_C}{\underline{Z} + R_C} \exp\left(-j\, 2\pi \frac{2l}{\lambda}\right)\right]$

et $\underline{I}(A) = \frac{U_0}{R_C}\left[1 - \frac{\underline{Z} - R_C}{\underline{Z} + R_C} \exp\left(-j\, 2\pi \frac{2l}{\lambda}\right)\right]$

si on pose $\underline{k} = \frac{\underline{Z} - R_C}{\underline{Z} + R_C}$ on écrira :

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}(A)}{\underline{I}(A)} = R_C \frac{1 + \underline{k} \exp\left(-j\, 2\pi \frac{2l}{\lambda}\right)}{1 - \underline{k} \exp\left(-j\, 2\pi \frac{2l}{\lambda}\right)}$$

A.5 : si $\underline{Z} = -jX$, $\underline{k}$ s'écrira : $\underline{k} = \frac{-jX - R_C}{-jX + R_C}$

soit $\underline{k} = \frac{-(R_C + jX)}{R_C - jX}$

$-\underline{k}$ se calcule comme le rapport de 2 nombres complexes conjugués.

son module sera égal à 1, et si θ est son argument, on écrira :

$-\underline{k} = \exp(j\theta)$ soit $\underline{k} = -\exp(j\theta)$

$\theta = \arg(-\underline{k}) = 2\arg(R_C + jX)$ (propriété des nombres complexes conjugués) d'où $\frac{\theta}{2} = \arg(R_c + jX)$.

X est positif, ainsi que R_c. on aura sans ambiguïté. $\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{X}{R_c}$

on remplacera $\underline{k}$ par $-\exp(-j\theta)$ dans l'expression de Z_E,

on aura donc : $\underline{Z_E} = R_c \dfrac{1 - \exp\left[j\theta - j2\pi\frac{2\ell}{\lambda}\right]}{1 + \exp\left[j\theta - j2\pi\frac{2\ell}{\lambda}\right]}$

avec la relation donnée dans la question :

$$\underline{Z_E} = jR_c \,\mathrm{tg}\left[2\pi\frac{\ell}{\lambda} - \frac{\theta}{2}\right]$$

A.6 : Si l'extrémité est en court-circuit, on aura $X = 0$ et $\theta = 0$

l'expression de $\underline{Z_E}$ sera $\underline{Z_E} = jR_c \,\mathrm{tg}\, 2\pi\frac{\ell}{\lambda}$

Application numérique

si $\underline{Z_E} = jL\omega$ on calcule $L = 64{,}3\,\mathrm{nH}$.

A.7 : on trouve $|\underline{Z_E}| = 115\,\Omega$ soit $L = 40{,}9\,\mathrm{nH}$.

B : Etude de l'oscillateur

B.1 : $\gamma' = C_1 + \dfrac{C_D C_2}{C_D + C_2}$

B.2 : $X_1 = jL'\omega + \dfrac{1}{j\gamma'\omega}$; $X_2 = \dfrac{1}{jC\omega}$; $X_3 = \dfrac{1}{jC\omega}$

$X_1 + X_2 + X_3 = 0$ donnera : $L'\omega_L = \dfrac{1}{\gamma'\omega_L} + \dfrac{2}{C\omega_L}$

soit $\omega_L^2 = \dfrac{1}{L'}\left(\dfrac{1}{\gamma'} + \dfrac{2}{C}\right)$ ou encore $\omega_L = \dfrac{\sqrt{\frac{C+2\gamma'}{\gamma' C}}}{\sqrt{L'}}$

$C = 56\,\mathrm{pF}$, et γ' aura pour valeur maximale : $\gamma' = C_1 + C_2 = 1{,}64\,\mathrm{pF}$, valeur obtenue lorsque C_D est infinie.

on vérifie donc que $C \gg \gamma'$ et on simplifie la relation donnant ω_L :

on obtient $\omega_L = \dfrac{1}{\sqrt{L\gamma}}$

B 3 - on trouve :

pour $V_{P_1} = 3{,}0\,\mathrm{V}$ C

$V_{P_2} = 6{,}0\,\mathrm{V}$

la variation de la

$\alpha =$

on peut calculer $\delta\gamma'$ de

ou bien δ

B 4 - la relation donna

soit $4\pi^2 f_L$

si L' reste constant

Application numéric

B.5 - on a trouvé δ

et δ

on en déduit $\delta\omega$

Application numér

C - 1 $\underline{H_1}(j\omega) = \dfrac{2,4}{(1 + jRC\omega)^2}$

Pour $\omega = 2\omega_A$ $\quad |\underline{H_1}(2j\omega_A)| = \dfrac{2,4}{1 + (2RC\omega_A)^2} = 4,3\ 10^{-3}$

L'amplitude du terme v'_p est égale à :

$$V'_p = |\underline{H_1}|\, V'_c = 17 \text{ mV}$$

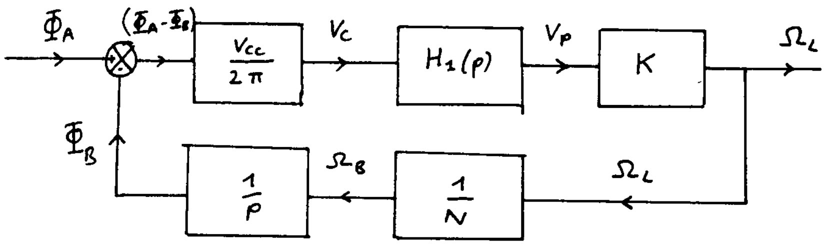
Le filtre passe-bas sert à éliminer le terme $v'_c(t)$

$$H_1(p) = \frac{2,4}{(1 + RCp)^2}$$

C - 2 $\omega_B(t) = \dfrac{d\varphi_B}{dt}(t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Phi_B(p)}{\Omega_B(p)} = \frac{1}{p}$$

C - 3



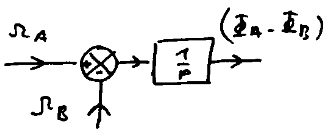
avec $H_1(p) = \dfrac{2,4}{(1 + RCp)^2}$

C - 4 On aura en plus un bloc $\frac{1}{p}$ pour passer de Ω_A à Φ_A

$$\Phi_A - \Phi_B = \frac{\Omega_A}{p} - \frac{\Omega_B}{p} = \frac{1}{p}(\Omega_A - \Omega_B)$$

Le bloc $\frac{1}{p}$ peut être transféré dans la chaîne directe après le soustracteur

soit



le reste étant inchangé

On se ramène bien au schéma de la figure 8 avec

$$H(p) = \frac{1}{p} \times \frac{V_{cc}}{2\pi} \times H_1(p) \times K$$

$$= \frac{2,4\,\frac{K V_{cc}}{2\pi}}{p\,(1 + RCp)^2} = \frac{H_0}{p\left(1 + \frac{p}{\omega_1}\right)^2}$$

avec $H_0 = 2,4\dfrac{K V_{cc}}{2\pi} = 2,17\ 10^7$ arrondi à $2,15\ 10^7$

$\omega_1 = \dfrac{1}{RC} = 6,67\ 10^3$ rad/s arrondi à $6\ 10^3$ rad/s

5 En continu $\omega \to 0$ $\quad |\underline{H}(j\omega)| \to \infty$

L'entrée $(\Omega_A - \Omega_B)$ est donc nulle

$$\Rightarrow \quad \omega_A = \omega_B = \frac{\omega_L}{N}$$

soit $\omega_L = N\omega_A$

$$\underline{f_L = N f_A}$$

-6 * $N_1 = \dfrac{447\,800}{12,5} = 35\,824$

* Entre deux canaux consécutifs, l'écart de fréquence est égal à 12,5 kHz

7 a) Asymptotes : * $\omega \ll \omega_1$ $\quad \underline{T}(j\omega) = \dfrac{H_0}{j\omega N}$

· $G = 20 \log |\underline{T}| = 20 \log \dfrac{H_0}{N} - 20 \log \omega$

droite de pente -20 dB/décade passant par le point $\omega = 600$ rad/s $\quad G = 0$ dB

· $\text{Arg}\,\underline{T} = -\dfrac{\pi}{2} = -90°$

* $\omega \gg \omega_1$ $\quad \underline{T}(j\omega) = -\dfrac{H_0\,\omega_1^2}{N j\,\omega^3}$ $\quad G = 20 \log \dfrac{H_0 \omega_1^2}{N} - 60 \log \omega$

droite de pente -60 dB/décade passant par le point $\omega = 6\ 10^3$ rad/s $\quad G = -20$ dB

$\text{Arg}\,\underline{T} = -\dfrac{3\pi}{2} = -270°$

Pour $\omega = \omega_1 = 6\ 10^3$ rad/s $\quad G = -28$ dB

$\text{Arg}\,\underline{T} = -\pi = -180°$

voir courbes sur feuille réponse

Condition de stabilité en boucle fermée :

Lorsque $\text{Arg}\,\underline{T} = 180°$ il faut que $G < 0$ dB (ou $|\underline{T}| < 1$)

C-7 b) $G = 0$ dB pour $\omega = 600$ rad/s

$$\text{Arg}\,\underline{T} = -90° - 2\,\text{Arctg}\,\frac{\omega}{\omega_1} = -101°,4$$

La marge de phase est égale à $180° - \text{Arg}\,\underline{T} = 78{,}6°$

Le système est très stable

C-8 a)
$$H'(p) = \frac{H(p)}{1 + \frac{H(p)}{N}} = \frac{H_0}{p + \frac{H_0}{N}} = \frac{\Omega_L(p)}{\Omega_A(p)}$$

C-8 b) on en déduit
$$\Omega_L(p)\left(p + \frac{H_0}{N}\right) = H_0\,\Omega_A(p)$$
$$\Omega_L(p)\left(\frac{Np}{H_0} + 1\right) = N\,\Omega_A(p)$$

lorsqu'on passe aux fonctions du temps
$$\omega_L(t) + \frac{N}{H_0}\frac{d\omega_L}{dt} = N\,\omega_A$$

C-8 c) solution générale sans second membre
$$\omega_L = A\,e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{N_2}{H_0}$$

solution particulière
$$\omega_L = N_2\,\omega_A$$

à $t = 0$ $\quad \omega_L = A + N_2\,\omega_A = \omega_{L1} = N_1\,\omega_A$

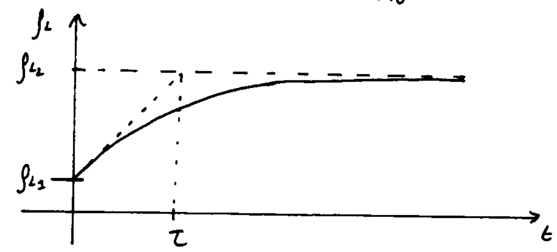
$\Rightarrow A = (N_1 - N_2)\,\omega_A$

$$\underline{\omega_L(t) = N_2\,\omega_A + (N_1 - N_2)\,\omega_A\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

valeur initiale $f_{L1} = 447{,}8$ MHz

valeur finale $f_{L2} = N_2 f_A = 448{,}3$ MHz

constante de temps $\tau = \frac{N_2}{H_0} = 1{,}67$ ms



C-8.d. $f_L = 448{,}3\ 10^6 - 0{,}5\ 10^{-6}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

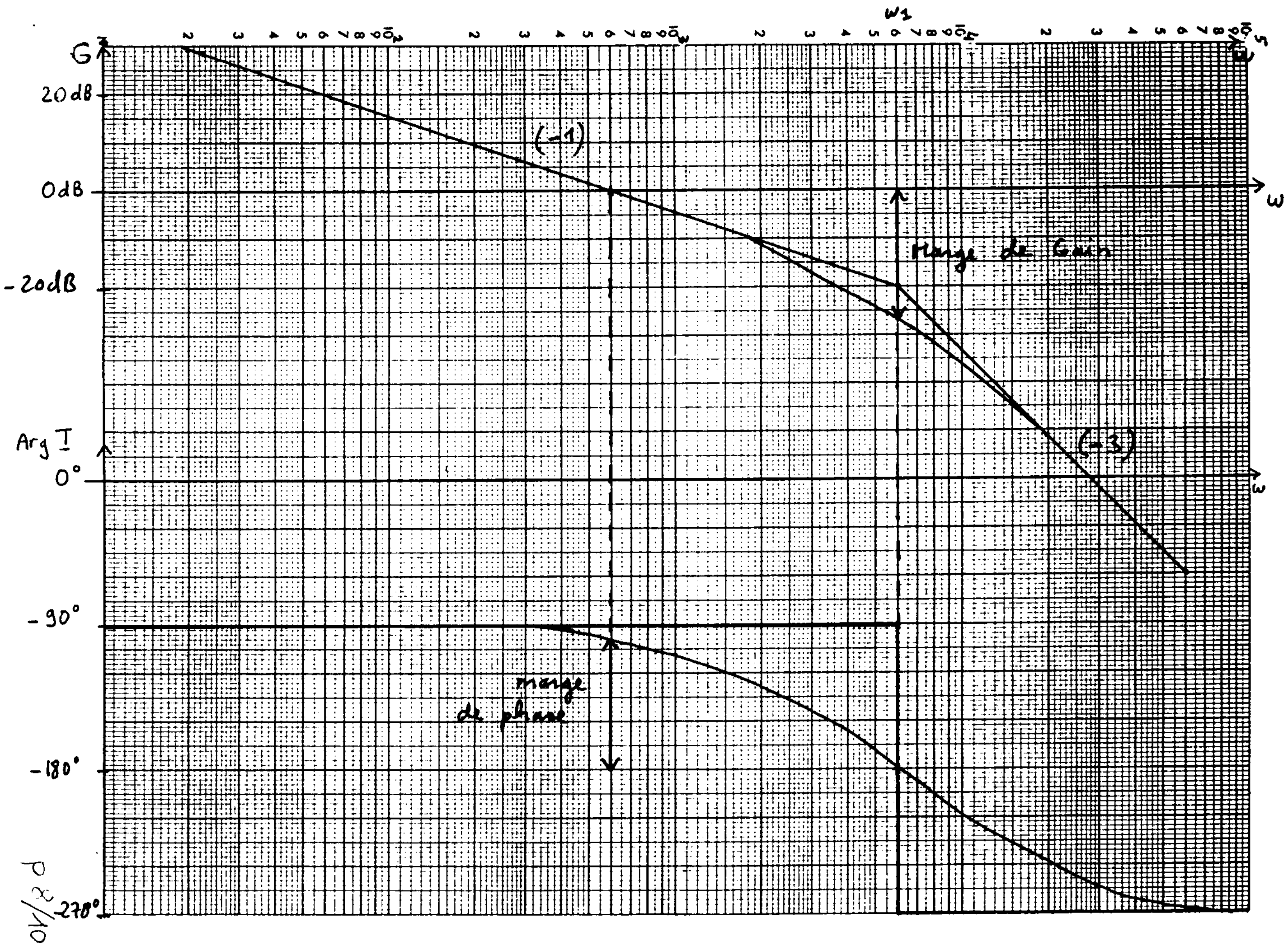
on cherche l'instant t tel que

$448{,}3\ 10^6 - f_L = 1$ kHz

soit $0{,}5\ 10^6\,e^{-\frac{t}{\tau}} = 10^3$

$t = \tau\,\text{Ln}\,500 = 6{,}2\,\tau$

$\underline{t = 10\text{ ms}}$



G
20 dB
0 dB
-20 dB
Arg T
0°
-90°
-180°
-270°
ω
ω1
(-1)
(-3)
Marge de Gain
marge de phase