

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Rappels de mathématiques :

• Pour $x \ll 1$: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$; $\frac{1}{1+jx} \approx 1 - jx$.

Rappels de physique :

On considère deux signaux synchrones $v_1(t)$ et $v_2(t)$:

$v_1(t) = V_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$; $v_2(t)$ est un signal rectangulaire.

- On définit le déphasage φ de $v_2(t)$ par rapport à $v_1(t)$ de la manière suivante : soit t_1 un instant où $v_1(t)$ s'annule par valeurs croissantes et t_2 l'instant le plus proche de t_1 où survient un front montant de $v_2(t)$, alors $\varphi = \omega(t_2 - t_1)$.
- La phase de $v_1(t)$ est $\phi_1 = \omega t + \alpha_1$; par extension, la phase de $v_2(t)$ est $\phi_2 = \phi_1 - \varphi$: ϕ_2 est la phase de l'harmonique fondamental de $v_2(t)$. On remarque que cette définition entraîne : $\varphi = \phi_1 - \phi_2$.
- La pulsation instantanée $\Omega_1(t)$ et la fréquence instantanée $F_1(t)$ du signal $s = a \sin(\phi(t))$ sont données respectivement par les expressions :

$$\Omega_1(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} , F_1(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Première partie : oscillateur à quartz

On considère un oscillateur qui doit pouvoir fournir un signal de fréquence programmable entre les valeurs limites 4544,0 kHz et 4545,0 kHz.

Cet oscillateur comporte un condensateur réglable qui, associé à un quartz, permet d'obtenir à la fois une excellente stabilité et le réglage fin nécessaire.

Un convertisseur numérique-analogique (CNA) contrôle la tension de réglage V_p du condensateur (fig.1) ; V_p est réglable entre 1 et 5 volts : elle commande la programmation recherchée.

1° Etude du condensateur à capacité réglable (fig. 1)

Les diodes D_1 et D_2 de la figure 1 sont identiques. En petits signaux (d'amplitude très inférieure à 1 volt et de fréquence proche de 4,5 MHz), chacune d'elles présente une capacité dynamique C_d réglable par la tension de polarisation V_p qui lui est appliquée.

Le CNA fournissant la tension V_p est assimilable à un générateur de tension parfait.

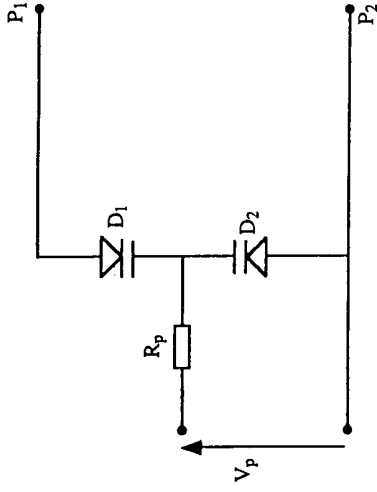


Figure 1

$R_p = 100 \text{ k}\Omega$. Pour $V_p > 0$, la capacité C_d est donnée par l'expression :

$$C_d = \frac{C_o}{\left(1 + \frac{V_p}{V_o}\right)^n}$$

avec $C_o = 30,0 \text{ pF}$, $V_o = 700 \text{ mV}$, $n = 0,7000$.

1.1. Analyser le montage de la figure 1 et montrer que pour de très petits signaux appliqués entre les points P_1 et P_2 , il peut se réduire à un condensateur de capacité C_v dont on donnera l'expression en fonction de V_p .

Préciser le rôle de la résistance R_p et justifier sa valeur.

1.2. Calculer les valeurs extrêmes C_{vM} et C_{vM} de C_v lorsque V_p passe de 1,0 V à 5,0 V.

2. Etude du quartz seul

On admet que le modèle du quartz Q étudié est représenté sur la figure 2.

L'amortissement du quartz étant négligé, L est l'inductance d'une bobine de résistance nulle.

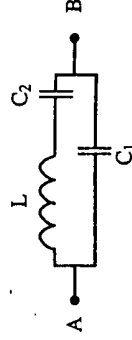


Figure 2

$L = 51,21 \text{ mH}$, $C_1 = 6,000 \text{ pF}$, $C_2 = 0,0240 \text{ pF}$.

2.1. Etude de l'impédance du quartz : $Z_Q = Z_{AB}$.

Montrer que Z_Q peut s'écrire $Z_Q = jX(\omega)$ où $X(\omega)$ est l'expression suivante :

$$X(\omega) = \frac{-1}{(C_1 + C_2)\omega} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$$

Identifier les termes ω_s et ω_p . On posera ensuite $\omega_s = 2\pi f_s$ et $\omega_p = 2\pi f_p$.

2.2. Démontrer l'expression approchée suivante :

$$\omega_p = \omega_s \left(1 + \frac{C_2}{2C_1} \right)$$

Calculer f_s et f_p avec les valeurs numériques précédentes.

2.3. Etudier le signe de $X(\omega)$ et déterminer la bande de fréquences dans laquelle on a $X(\omega) > 0$. Calculer les valeurs de X pour les fréquences $f_1 = 4544,0$ kHz, $f_2 = 4544,5$ kHz, $f_3 = 4545,0$ kHz.

3. Etude de l'oscillateur (figure 3).

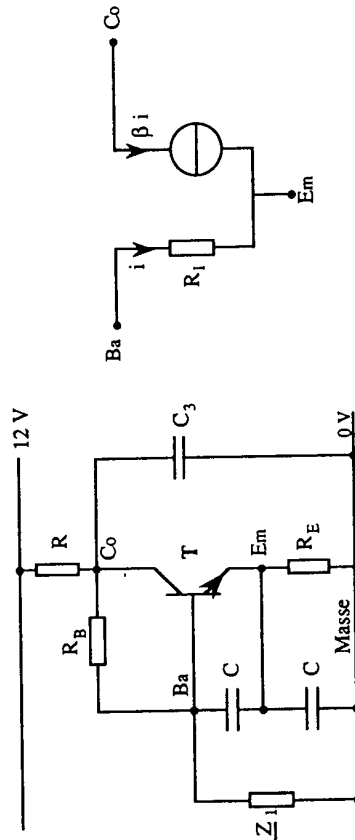


Figure 3

$C = 470$ pF, $C_3 = 10,0$ nF, $R_E = 1,00$ k Ω , $R_B = 100$ k Ω , $R = 1,50$ k Ω , $|Z_{E1}| < 1$ k Ω . Pour de petits signaux, le transistor T est modélisé par le dispositif représenté sur la figure 4, avec $R_1 = 9,00$ k Ω et $\beta = 10$.

Figure 4

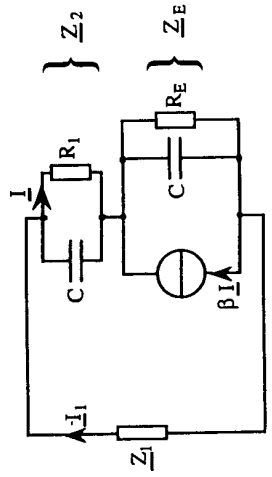


Figure 5

3.1. Montrer qu'en petits signaux, compte tenu des valeurs numériques données, le montage de la figure 3 admet pour schéma équivalent celui de la figure 5, constitué de trois dipôles en série, d'impédances Z_1 , Z_2 et Z_E , traversés par le courant d'intensité I_1 .

3.2. Conditions d'entretien d'une oscillation quasi-sinusoidale

3.2.1. Montrer que Z_E peut s'écrire :

$$Z_E = \frac{(\beta + 1 + j R_1 C \omega) R_E}{(1 + j R_1 C \omega)(1 + j R_E C \omega)} = \frac{\beta R_E}{(1 + j R_1 C \omega)(1 + j R_E C \omega)} + \frac{R_E}{(1 + j R_E C \omega)}$$

3.2.2. La condition d'entretien d'une oscillation quasi-sinusoidale se ramène à l'égalité :

$$Z_1 + Z_2 + Z_E = 0$$

Montrer que pour $f = f_2 = 4544,5$ kHz, on a : $Z_2 = \frac{1}{j C \omega}$ et $Z_E \approx \frac{1}{j C \omega}$.

En déduire la nature et la valeur de Z_1 pour qu'il y ait oscillation à cette fréquence.

Dans la suite du problème on admet que pour la bande de fréquences considérée (de 4544 kHz à 4545 kHz), Z_1 est de la forme $Z_1 = j X_1(\omega)$, avec $X_1(\omega) = C \text{ste} = 148 \Omega$.

4. Etude de la variation de fréquence de l'oscillateur

La branche de l'oscillateur d'impédance Z_1 (fig. 3 et 5), est constituée par :

- le condensateur de capacité C_v réglable, de la figure 1, étudié à la question 1 ;
- le quartz Q de la figure 2, étudié à la question 2 ;
- une bobine de résistance négligeable dont l'inductance est notée L_1 .

Ces trois éléments sont montés en série.

4.1. Montrer que l'impédance de cette branche peut s'écrire $Z_{A1} = j X_1(\omega)$. Expliciter $X_1(\omega)$.

4.2. Par action sur V_p , on règle la capacité C_v à la valeur $C_{v2} = 5,26$ pF. Calculer la valeur de l'inductance L_1 pour que la fréquence d'oscillation correspondant à cette valeur soit la fréquence centrale $f_2 = 4544,5$ kHz.

4.3. On donne à L_1 la valeur précédente. Calculer les valeurs C_{v1} et C_{v3} qui doivent être données à C_v pour que la fréquence d'oscillation prenne respectivement les valeurs $f_1 = 4544,0$ kHz et $f_3 = 4545,0$ kHz.

Deuxième partie : boucle à verrouillage de phase

Le système étudié doit transmettre deux types d'informations : l'existence d'un point noir qui se traduit par la présence d'un signal de fréquence F_1 ou celle d'un point blanc qui correspond à la présence d'un signal de fréquence $F_2 = F_1 + 800$ Hz.

A un certain niveau du dispositif étudié, l'onde électromagnétique véhiculant ces deux types de signaux possède une fréquence propre élevée (proche de 50 MHz). Au fur et à mesure que les informations progressent vers les récepteurs auxquels elles sont destinées, deux changements de fréquences successifs permettent d'abaisser la fréquence du support des signaux utiles : le deuxième changement de fréquence fournit un signal de fréquence 1500 Hz ou 2300 Hz.

On se propose d'étudier la boucle à verrouillage de phase chargée de discriminer ces fréquences.
On note $v_e(t)$ le signal dont la fréquence est égale à 1500 Hz ou à 2300 Hz (figure 6). La boucle doit fournir un niveau particulier de tension $u_c(t)$ pour chacune de ces fréquences.

La boucle comporte un comparateur de phase, un filtre passe-bas et un oscillateur contrôlé en tension désigné par les initiales OCT.

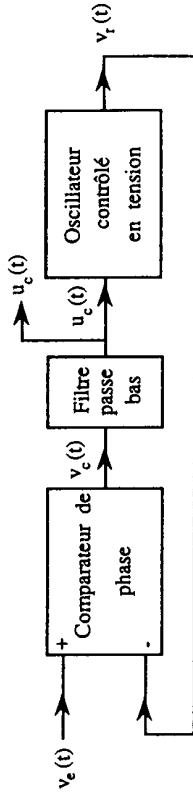


Figure 6

1. Etude expérimentale du comparateur de phase en régime permanent

Le signal d'entrée de la boucle, $v_e(t)$, est sinusoïdal; il est appliqué à l'entrée + du comparateur. Le signal de sortie $v_r(t)$ de la boucle est un signal rectangulaire, synchrone de $v_e(t)$ lorsque la boucle est "accrochée".

On désigne par ϕ le déphasage de $v_r(t)$ par rapport à $v_e(t)$, au sens où ce terme a été défini dans l'avertissement.

La boucle étant accrochée, on a enregistré les signaux d'entrée $v_e(t)$ et de sortie $v_r(t)$ de la boucle, ainsi que le signal de sortie $v_c(t)$ du comparateur de phase, pour deux fréquences différentes de $v_e(t)$: 1700 Hz et 2100 Hz.

Ces enregistrements sont reportés sur le document annexe n°1 qui comporte par ailleurs un tableau donnant les valeurs du rapport cyclique α du signal $v_c(t)$ et la valeur moyenne V_{cm} de ce signal pour quatre fréquences différentes dont 1700 Hz et 2100 Hz.

1.1. Montrer, en exploitant le document annexe n°1, que le déphasage ϕ de $v_r(t)$ par rapport à $v_e(t)$, exprimé en radians, peut s'écrire $\phi = -\pi \alpha$.

En déduire les valeurs de ϕ pour les fréquences 1300, 1700, 2100 et 2500 Hz.

1.2. On admet que les variations de V_{cm} sont proportionnelles aux variations du déphasage ϕ :

$$K = \frac{\Delta V_{cm}}{\Delta \phi} \quad (K \text{ en volts par radian})$$

En utilisant les valeurs numériques précédentes, déterminer K.

Déduire de cette proportionnalité les valeurs de ϕ pour $f_{e1} = 1500$ Hz et $f_{e2} = 2300$ Hz.

Pour la suite du problème, on prendra pour K la valeur donnée par le fabricant de la boucle qui annonce : $|K| = \frac{2}{\pi} \text{ V/rad}$.

2. Etude du filtre

Le filtre passe bas contenu dans la boucle est représenté sur la figure 7.

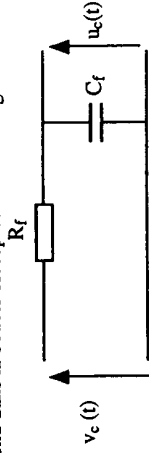


Figure 7

2.1. Montrer que la transmittance d'un tel filtre est de la forme :

$$T_F(p) = \frac{\omega_0}{p + \omega_0}$$

Identifier ω_0 et calculer sa valeur sachant que $R_f = 3,60 \text{ k}\Omega$ et $C_f = 220 \text{ nF}$.

2.2. La boucle étant accrochée, déterminer, en exploitant le document annexe n°1, la relation entre la fréquence f_c de la tension $v_c(t)$ définie sur la figure 6 et la fréquence f_e de $v_e(t)$.

2.3. Montrer que pour $f_{e1} = 1500$ Hz et $f_{e2} = 2300$ Hz, la boucle étant accrochée et fonctionnant en régime permanent, la tension $u_c(t)$ est pratiquement continue. Calculer sa valeur pour chacune de ces fréquences.

2.4. Dans la suite du problème, on admet, pour simplifier, que la grandeur d'entrée du filtre est la valeur moyenne $V_{cm}(t)$ de la tension $v_c(t)$. Pourquoi cette simplification est-elle légitime ?

3. Etude de l'oscillateur contrôlé (O C T)

3.1. Caractéristique statique

On admet que la variation de fréquence Δf_r de l'oscillateur est proportionnelle à la variation Δu_c de sa tension de commande.

En régime permanent le coefficient $\beta = \Delta f_r / \Delta u_c$ peut être mesuré par : $\beta = \Delta f / \Delta V_{cm}$.

Calculer la valeur de β en utilisant le tableau du document annexe n°1.

Pour la suite du problème on utilisera la valeur typique donnée par le fabricant, soit :

$$\beta = -1,26 \text{ kHz/V}$$

3.2. Transmittance de l'oscillateur contrôlé
L'étude de la boucle à verrouillage de phase (fig.8) implique que la grandeur de sortie de l'OCT soit non sa fréquence $f_r(t)$ mais sa phase $\phi_r(t)$.

Plus exactement, afin de ramener l'étude suivante à celle d'un système asservi linéaire, toutes les variables temporelles intervenant en régime dynamique sont les écarts δf_e , $\delta \phi_e$, δV_{cm} , δu_c , $\delta \phi_r$ et $\delta \phi$ des grandeurs définies précédemment par rapport à leur valeur à l'état de repos relatif à la fréquence $f_{e1} = f_{r1} = 1500$ Hz : $\delta f_e = f_e - f_{e1}$, $\delta \phi_e = \phi_e - \phi_{e1}$, etc. Les transformées de Laplace respectives de ces écarts sont désignées respectivement par $F_e(p)$, $\Phi_e(p)$, $V_{cm}(p)$, $U_c(p)$, $\Phi_r(p)$ et $\varepsilon(p)$.

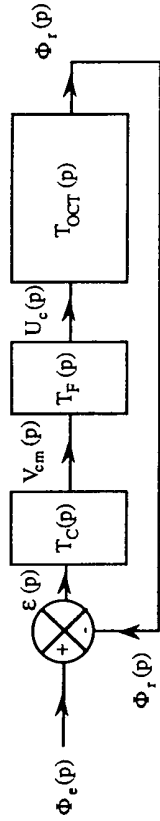


Figure 8

En utilisant la relation entre la pulsation instantanée d'un signal et la phase de ce même signal rappelée dans l'avertissement, montrer que la transmittance dynamique de l'OCT (fig. 8) peut être mise sous la forme :

$$T_{OCT}(p) = \frac{\lambda}{p}$$

Identifier le facteur λ et calculer sa valeur.

4. Transmittance de la boucle ouverte

On admet que le comparateur de phase peut être décrit par l'opérateur de différence qui élabore $\delta \phi = \delta \phi_e - \delta \phi_r$, de transformée $\varepsilon(p) = \Phi_e(p) - \Phi_r(p)$, suivi du convertisseur de transmittance $T_c = K$.

4.1. Définir et calculer la transmittance de la boucle ouverte $T_{bo}(p)$.

Montrer que $T_{bo}(p) = \frac{A}{p(p+B)}$. Déterminer A et B.

4.2. Définir la marge de phase θ de $T_{bo}(j\omega)$.

Sur le document réponse, on a relevé le diagramme de Bode de $T_{bo}(f)$ en module et argument : évaluer graphiquement θ . Inscrire sa valeur en degrés dans le cadre du document réponse.

5. Etude dynamique de la boucle fermée

5.1. Calculer l'expression intégrale de la transmittance $T_{bf}(p) = \frac{\Phi_r(p)}{\Phi_e(p)}$.

Montrer que $T_{bf}(p)$ peut s'écrire : $T_{bf}(p) = \frac{\omega_2^2}{p^2 + 2m\omega_2 p + \omega_2^2}$.

Exprimer littéralement ω_2 et le facteur d'amortissement m en fonction des coefficients A et B déterminés précédemment. Calculer ω_2 et m .

5.2. On module la fréquence f_e du signal $v_e(t)$ à partir de $f_{e1} = 1500$ Hz, grâce à un générateur auxiliaire OCT₁ commandé par une tension $v_1(t)$, selon le schéma de la figure 9.

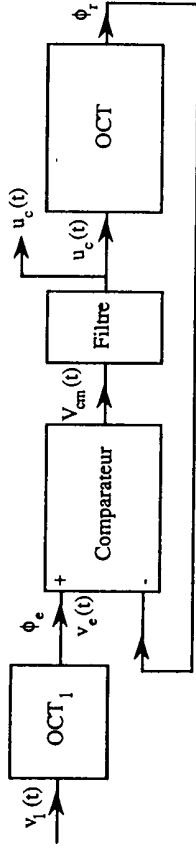


Figure 9

Pour simplifier, on admet que ce nouveau générateur (OCT₁) a les mêmes caractéristiques que l'oscillateur contrôlé en tension (OCT) déjà étudié.

Le signal $\delta v_1(t)$ devient la grandeur d'entrée du système étudié tandis que $\delta u_c(t)$ en devient la grandeur de sortie.

Montrer que la transmittance $T_m(p) = \frac{U_c(p)}{V_1(p)}$ est égale à la fonction $T_{bf}(p)$ déjà calculée.

5.3. Réponse indicelle

Pour cette question, on prend $T_m(p) = \frac{U_c(p)}{V_1(p)} = \frac{\omega_2^2}{p^2 + 2m\omega_2 p + \omega_2^2}$ avec $\omega_2 = 2520$ rad/s et $m = 0,250$.

5.3.1. Le signal $\delta v_1(t)$ est un échelon de hauteur E. Calculer E pour que la variation de fréquence correspondante du signal $f_e(t)$ soit $\delta f_e = 800$ Hz.

5.3.2. Calculer la transformée de Laplace $U_c(p)$ correspondant à l'échelon $\delta v_1(t) = E u(t)$.

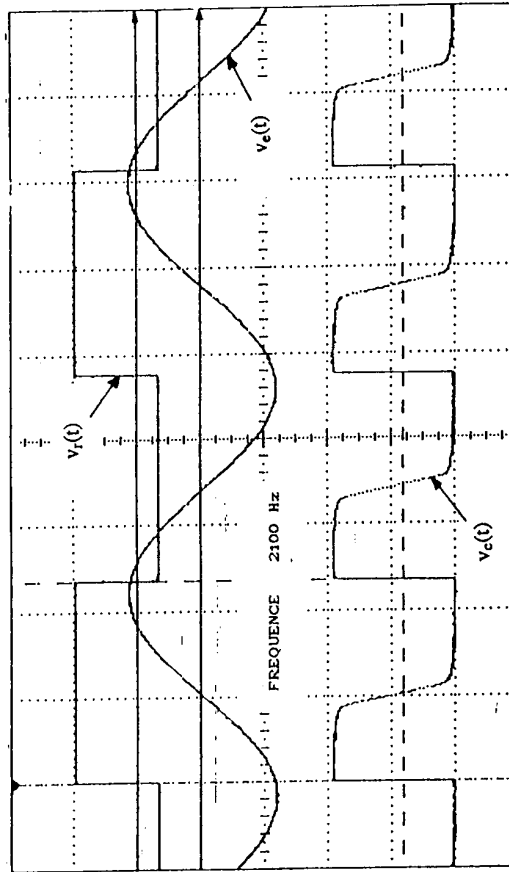
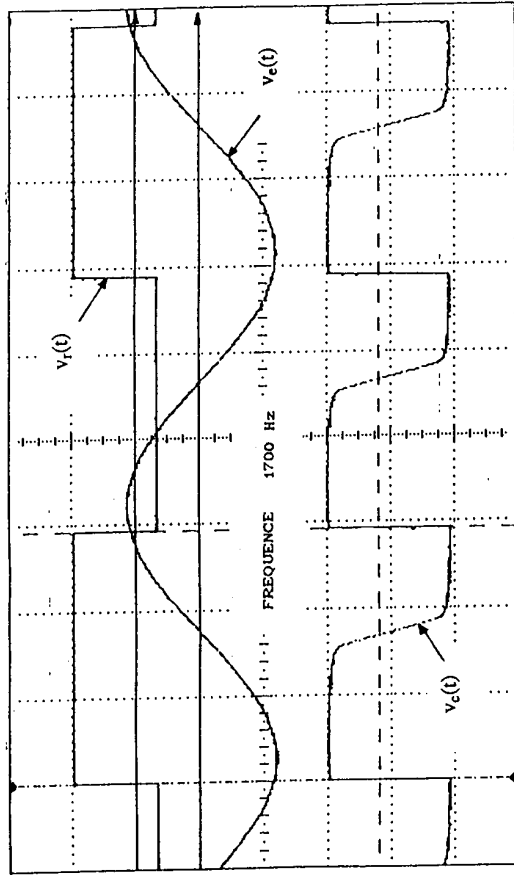
En déduire la valeur finale de $\delta u_c(t)$ pour la valeur précédente de E.

5.3.3. Décomposer $U_c(p)$ de façon à faire apparaître la transformée de Laplace $U_{ct}(p)$ du régime transitoire de $\delta u_c(t)$ et la transformée $U_{cp}(p)$ du régime permanent de $\delta u_c(t)$.

5.3.4. En comparant $U_{ct}(p)$ et $U_{cp}(p)$ aux transformées $F(p)$ données dans le tableau du document annexe n°2, donner l'expression de $\delta u_c(t)$ correspondant à l'échelon $\delta v_1(t) = E u(t)$.

Esquisser la représentation graphique de $\delta u_c(t)$.

Document annexe n°1



Fréquence	1300	1700	2100	2500	en hertz
Rapport cyclique α de $v_e(t)$	75,7	59,3	43,2	27,1	en %
V_{cm} : valeur moyenne de $v_e(t)$	5,13	4,82	4,51	4,20	en volts

Document annexe n°2

Tableau de quelques transformées F(p) d'un signal f(t)

original f(t)	image F(p)
échelon unité u(t)	$\frac{1}{p}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
A $e^{-at} \sin(\omega t + \phi)$ avec: $A = \sqrt{\frac{(\omega_1 - a)^2 + \omega^2}{\omega^2}}$ et $\phi = \text{Arc tan} \frac{\omega}{\omega_1 - a}$	$\frac{p + \omega_1}{(p+a)^2 + \omega^2}$

