

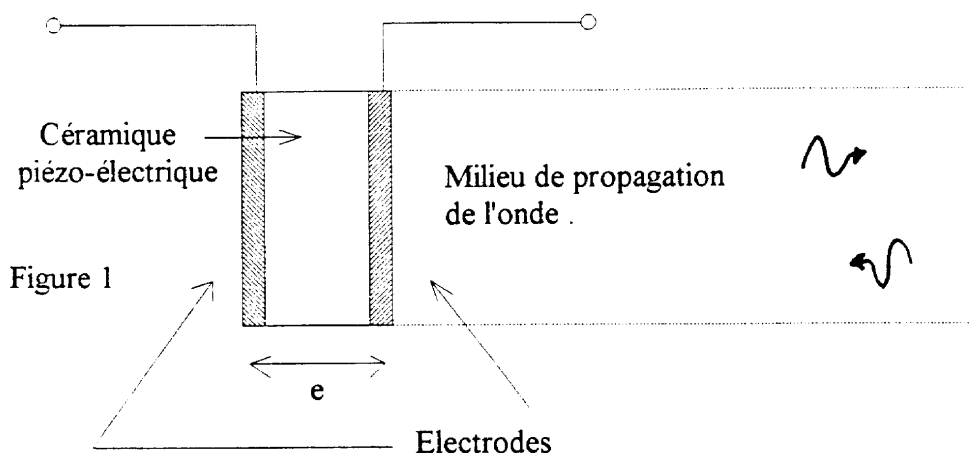
# PHYSIQUE APPLIQUEE

## Avertissement aux candidats

- Les trois parties du problème sont indépendantes.
- Le sujet comporte une annexe ainsi qu'un document réponse à rendre avec la copie.

### Première partie : LA SONDE ULTRASONORE

La sonde ultrasonore utilisée dans la fonction principale " conversion électroacoustique " de l'échotomographe est constituée d'une céramique piézo-électrique de forme parallélépipédique recouverte sur deux de ses faces opposées par des parois métalliques de surface S servant d'électrodes ( fig.1 ).



En mode émetteur, un générateur applique un signal électrique entre les deux électrodes. En réaction à ce signal, la céramique piézo-électrique se déforme et les vibrations mécaniques de ses parois produisent une onde ultrasonore dans le milieu extérieur qui entoure la sonde.

En mode récepteur, les différents échos renvoyés par les obstacles rencontrés par l'onde ultrasonore se propageant dans le milieu extérieur, excitent mécaniquement la céramique, ce qui entraîne l'apparition d'un signal électrique entre les deux électrodes.

#### 1. Mode de résonance fondamental

Pour obtenir une onde ultrasonore d'amplitude significative, on excite la sonde suivant son mode de résonance fondamental. Pour cela, il faut que l'épaisseur  $e$  de la sonde soit égale à

une demi-longueur d'onde soit :  $e = \frac{\lambda}{2}$ .

Sachant que la célérité des ultrasons dans la céramique est égale à :  $c_{\text{céram}} = 4,0 \cdot 10^3$  m/s, calculer l'épaisseur  $e$  de la sonde pour obtenir un émetteur à ultrasons ayant une fréquence de résonance  $F = 10,0$  MHz.

## 2. Résolution axiale théorique en régime impulsionnel

La résolution axiale est le pouvoir de séparation de deux cibles sur l'axe de la sonde. Elle est donnée par la distance minimale qui sépare deux cibles pour que leurs images soient distinctes ( fig. 2 ).

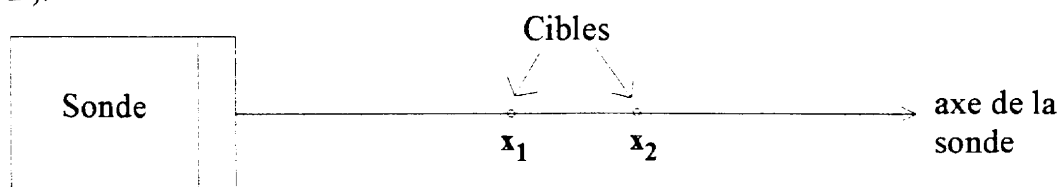


Figure 2

Les ondes ultrasonores sont émises dans des tissus mous dans lesquels la célérité des ultrasons est égale à :

$$c_{\text{tissus}} = 1,45 \cdot 10^3 \text{ m/s.}$$

À  $t = 0 \text{ s}$ , on envoie une onde constituée d'une période de sinusoïde de fréquence  $F = 10,0 \text{ MHz}$ .

2.1. Calculer la longueur d'onde  $\lambda_1$  dans les tissus mous de l'onde sinusoïdale ultrasonore.

2.2. Lorsque l'onde atteint la cible située en  $x_1$ , une partie de son énergie est réfléchiée et le reste est transmis.

Cette onde réfléchiée donne naissance à un signal échographique recueilli à un instant  $t_1$  aux bornes de la sonde qui fonctionne alors en récepteur.

Exprimer  $t_1$  en fonction de  $x_1$  et  $c_{\text{tissus}}$ .

2.3. Pour la cible située en  $x_2$ , on recueille un signal échographique à un instant  $t_2$ .

Exprimer  $t_2$  en fonction de  $x_2$  et  $c_{\text{tissus}}$ .

2.4. Pour pouvoir séparer ces deux cibles sur l'image échographique, il faut que l'écart de temps entre les deux instants  $t_1$  et  $t_2$  soit supérieur à la période  $T = 1/F$  associée à l'onde ultrasonore.

En déduire la valeur de la résolution axiale théorique notée  $\Delta x_{\text{min}}$ .

## 3. Puissance acoustique rayonnée par la sonde ultrasonore en régime sinusoïdal permanent

### 3.1. Impédance acoustique

Un milieu où se propage une onde acoustique est caractérisé par son impédance acoustique. Celle-ci est définie par  $Z = \rho \times c$ .

$\rho$  : masse volumique du milieu en  $\text{kg/m}^3$  et  $c$  : célérité des ultrasons dans le milieu.

3.1.1. Calculer la valeur de l'impédance acoustique de la céramique :  $Z_{\text{céram}}$  sachant que  $\rho_{\text{céram}} = 7,15 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  et  $c_{\text{céram}} = 4,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ .

3.1.2. Calculer la valeur de l'impédance acoustique des tissus mous :  $Z_{\text{tissus}}$  sachant que  $\rho_{\text{tissus}} = 1,03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  et  $c_{\text{tissus}} = 1,45 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ .

### 3.2. Coefficient de qualité d'une céramique piézo-électrique

3.2.1. Lorsque l'on applique une tension constante  $U$  aux bornes d'une céramique piézo-électrique, il apparaît une déformation mécanique d'amplitude  $A$  telle que :  $A = d \times U$ .

La constante  $d$  est appelée module piézo-électrique, sa valeur dépend du type de matériau. Pour la sonde étudiée :  $d = 0,15 \cdot 10^{-10} \text{ m/V}$ .

Calculer la valeur de l'amplitude  $A$  de la déformation pour  $U = 10 \text{ V}$ .

3.2.2. Lorsque l'on applique une tension sinusoïdale,  $u(t) = \hat{U} \sin(\Omega t)$ , dont la fréquence  $F = \Omega / (2\pi)$  correspond à la fréquence de résonance de la sonde, il apparaît une déformation mécanique sinusoïdale telle que :

$$a(t) = \hat{A} \sin(\Omega t) \quad \text{avec} \quad \hat{A} = Q \times d \times \hat{U}.$$

$Q$  est le coefficient de qualité du résonateur électromécanique vibrant dans un milieu extérieur.

Son expression est donné par : 
$$Q = \frac{2}{\pi} \times \frac{Z_{\text{céram}}}{Z_{\text{ext}}}$$

En déduire la valeur du coefficient de qualité d'une céramique piézo-électrique émettant des ultrasons dans des tissus mous :  $Q_{\text{tissus}}$ .

### 3.3. Puissance acoustique

On suppose que la sonde est excitée à sa fréquence de résonance par un signal sinusoïdal  $u(t) = \hat{U} \sin(\Omega t)$  avec  $F = 10,0 \text{ MHz}$ .

On se place dans le milieu de propagation c'est à dire un tissu mou, au voisinage de la paroi de la sonde.

On montre que dans ces conditions, la puissance acoustique moyenne  $I$  traversant une unité de

surface est donnée par l'expression : 
$$I = \frac{1}{2} Z_{\text{tissus}} \Omega^2 \hat{A}^2$$

On souhaite obtenir une onde, se propageant dans les tissus, dont la puissance acoustique moyenne  $I$  est égale à  $1 \text{ W/cm}^2$ .

Calculer la valeur crête de la tension sinusoïdale,  $\hat{U}$ , que l'on doit appliquer aux bornes de la sonde.

## Deuxième partie: FILTRE PASSIF PASSE-BANDE

La réponse en fréquence du filtre passif passe-bande (fig 3) utilisé dans la fonction principale " réception " de l'échotomographe a été tracée grâce à un logiciel de simulation (document réponse). Cette partie du problème a pour but de vérifier la validité de cette courbe par une étude simplifiée de la transmittance du filtre et le tracé de son diagramme asymptotique de Bode (gain).

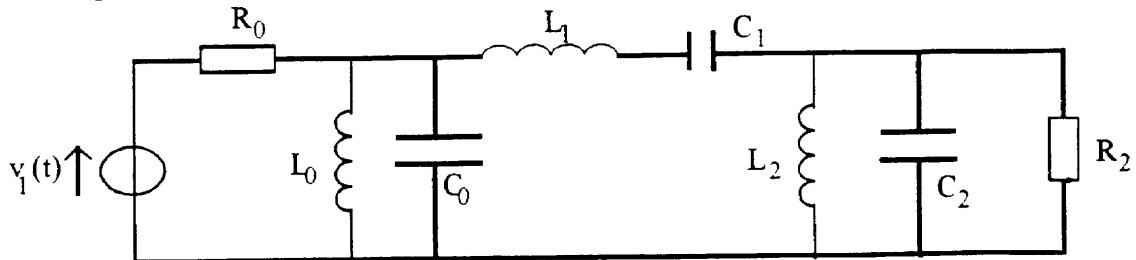


Figure 3

$$R_0 = 50 \, \Omega \quad L_0 = 1,00 \, \mu\text{H} \quad C_0 = 330 \, \text{pF} \quad L_1 = 1,80 \, \mu\text{H} \quad C_1 = 220 \, \text{pF} \quad C_2 = 330 \, \text{pF} \\ L_2 = 1,00 \, \mu\text{H} \quad R_2 = 50 \, \Omega .$$

### 1. Transmittance d'un quadripôle en $\pi$

1.1. Justifier le schéma dessiné figure 4 qui facilite l'étude de la réponse en fréquence du filtre.

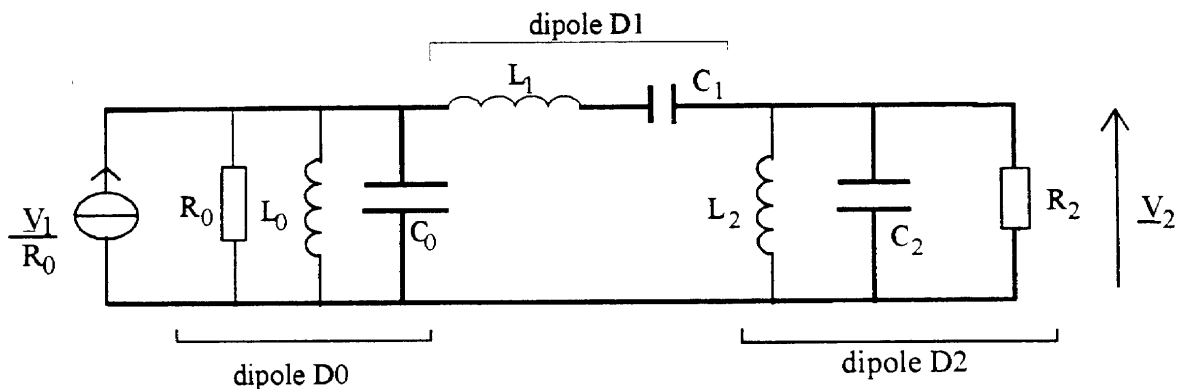


Figure 4

1.2. Etablir la transmittance  $\underline{T} = \underline{V}_2/\underline{V}_1$  du quadripôle en  $\pi$  de la figure 5 en utilisant les admittances  $\underline{Y}_0$  et  $\underline{Y}_2$  des dipôles  $D_0$  et  $D_2$  et l'impédance  $\underline{Z}_1$  du dipôle  $D_1$ .

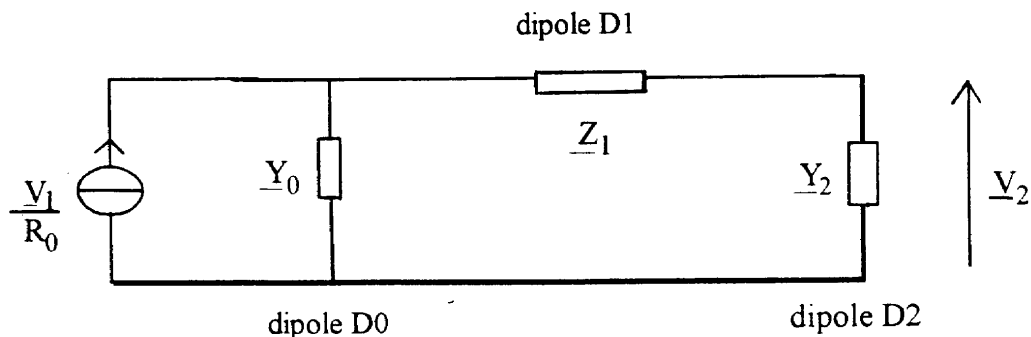


Figure 5

Vérifier que cette transmittance est :  $\underline{T} = \frac{1}{R_0 \underline{Y}_0 (2 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0)}$   
 quand les deux dipôles  $D_0$  et  $D_2$  sont identiques ( $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_0$ ).

## 2. Dipôle $D_0$

2.1. Etablir l'expression de l'admittance  $\underline{Y}_0$  du dipôle  $D_0$ .

2.2. Déterminer la pulsation  $\omega_0$  qui annule la partie imaginaire de  $\underline{Y}_0$ . Calculer la valeur numérique de la fréquence  $f_0$  correspondante.

2.3. A quel élément est équivalent le dipôle  $D_0$  à la fréquence  $f_0$ ?  
 Dans la suite de l'étude, le résultat obtenu pour  $f = f_0$  sera étendu aux fréquences voisines de  $f_0$ .

2.4. A quel élément ( $R_0$  ou  $L_0$  ou  $C_0$ ) est équivalent le dipôle  $D_0$   
 a) dans un fonctionnement en basse fréquence ( $f < 1,6$  MHz)?  
 b) dans un fonctionnement en haute fréquence ( $f > 50$  MHz)?

## 3. Dipôle $D_1$

3.1. Etablir l'expression de l'impédance  $\underline{Z}_1$  du dipôle  $D_1$ .

3.2. Déterminer la pulsation  $\omega_1$  qui annule  $\underline{Z}_1$ . Calculer la valeur numérique de la fréquence  $f_1$  correspondante.

3.3. A quel élément ( $L_1$  ou  $C_1$ ) est équivalent le dipôle  $D_1$   
 a) dans un fonctionnement en basse fréquence ( $f < f_1/5$ )?  
 b) dans un fonctionnement en haute fréquence ( $f > 5f_1$ )?

## 4. Réponse en fréquence du filtre passif passe-bande

### 4.1. Fonctionnement en basse fréquence ( $f < 1,6$ MHz)

4.1.1. Dessiner le schéma équivalent du circuit.

4.1.2. Etablir l'expression de la transmittance  $\underline{T} = \underline{V}_2/\underline{V}_1$  du filtre à l'aide du résultat de la question 1.2.

4.1.3. Montrer que, dans ce domaine de fréquence, cette transmittance peut s'écrire

$$\underline{T}(j\omega) \approx \left[ j \frac{\omega}{\omega_{BF}} \right]^3$$

Exprimer  $\omega_{BF}$  en fonction de  $L_0$ ,  $C_1$  et  $R_0$ . Calculer la valeur numérique de la fréquence  $f_{BF}$  correspondante.

4.1.4. En déduire le gain et l'argument de la transmittance du filtre à la fréquence  $F_a = 1$  MHz et la pente de l'asymptote à la courbe de gain en basse fréquence.

#### 4.2. Fonctionnement à la fréquence $f_1$ voisine de $f_0$

4.2.1. Dessiner le schéma équivalent du circuit.

4.2.2. Etablir l'expression de la transmittance  $\underline{T} = \underline{V}_2/\underline{V}_1$  du filtre.

4.2.3. En déduire le gain et l'argument de la transmittance du filtre à la fréquence  $f_1$ .

#### 4.3. Fonctionnement en haute fréquence ( $f > 50$ MHz)

4.3.1. Dessiner le schéma équivalent du circuit.

4.3.2. Etablir l'expression de la transmittance  $\underline{T} = \underline{V}_2/\underline{V}_1$  du filtre à l'aide du résultat de la question 1.2.

4.3.3. Montrer que, dans ce domaine de fréquence, cette transmittance peut s'écrire

$$\underline{T}(j\omega) \approx \frac{1}{\left[ j \frac{\omega}{\omega_{HF}} \right]^3}$$

Exprimer  $\omega_{HF}$  en fonction de  $L_1$ ,  $C_0$  et  $R_0$ . Calculer la valeur numérique de la fréquence  $f_{HF}$  correspondante.

4.3.4. En déduire le gain et l'argument de la transmittance du filtre à la fréquence  $F_c = 75$  MHz et la pente de l'asymptote à la courbe de gain en haute fréquence.

#### 4.4. Synthèse : tracé des asymptotes pour valider la courbe obtenue par simulation

4.4.1. Fonctionnement en basse fréquence :

A l'aide de l'expression approchée de la transmittance  $\underline{T}(j\omega)$  du filtre passe-bande, tracer le diagramme de Bode de son gain sur le document réponse.

4.4.2. Fonctionnement en haute fréquence :

A l'aide de l'expression approchée de la transmittance  $\underline{T}(j\omega)$  du filtre passe-bande, tracer le diagramme de Bode de son gain sur le document réponse.

4.4.3. Fonctionnement au voisinage de  $f_0$  :

Placer l'horizontale qui caractérise le gain dans cette zone sur le document réponse.

#### 5. Exploitation de la réponse en fréquence du filtre

5.1. Déterminer, sur la courbe de simulation, les fréquences de coupure à -3dB du filtre. En déduire la bande passante du filtre passe-bande.

5.2. On se place dans le cas où le signal  $v_1(t)$  est la somme de 3 signaux sinusoïdaux de même amplitude  $U$  (régime sinusoïdal permanent) : l'un est le signal utile de fréquence  $F_b = 8$  MHz et les 2 autres sont des signaux parasites de fréquence  $F_a = 1$  MHz et  $F_c = 75$  MHz.

$$v_1(t) = U \sin(2\pi F_a t) + U \sin(2\pi F_b t) + U \sin(2\pi F_c t)$$

Déterminer l'expression du signal de sortie  $v_2(t)$ .

## Troisième partie : ASSERVISSEMENT DE LA POSITION DE LA SONDE ULTRASONORE

Pour obtenir une imagerie en temps réel, on produit périodiquement un balayage de l'espace par un faisceau d'ondes ultrasonores. Pour cela, la sonde émettrice pivote sous l'action d'un moteur à courant continu. Le déplacement de la sonde est contrôlé par la fonction principale " asservissement de position ". Dans cette troisième partie, on étudie une solution numérique de cet asservissement.

Le schéma synoptique de l'asservissement est le suivant ( fig.6 ) :

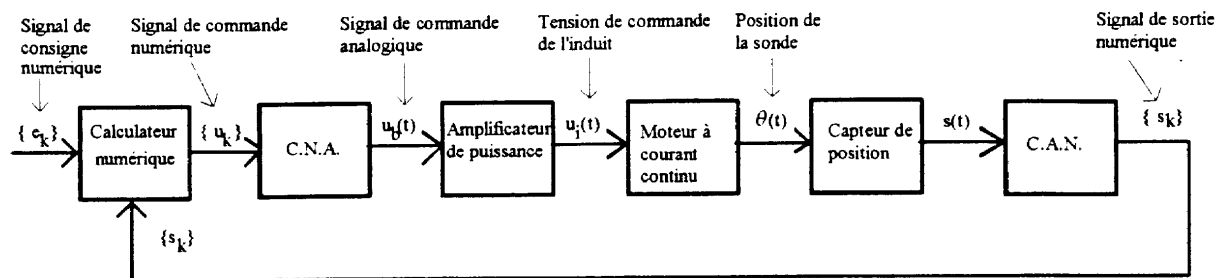


Figure 6

Le calculateur numérique effectue un algorithme qui réalise les deux fonctions :

- comparateur : calcul de la différence  $\varepsilon_k = e_k - s_k$ .
- correcteur : calcul du signal de commande  $u_k$ .

Le capteur de position est un capteur à effet Hall qui fournit une tension,  $s(t)$ , image de la position de la sonde.

La fréquence d'échantillonnage de l'asservissement numérique est :  $F_e = 1 / T_e$ .

### 1. Transmittance en p du processus analogique

Le processus analogique constitué par l'amplificateur, le moteur à courant continu et son capteur de position est modélisé par la transmittance suivante :

$$G_a(p) = \frac{S(p)}{U_b(p)} = \frac{G_0}{p(1 + \tau p)} \quad \text{avec} \quad S(p) = \mathcal{L}[s(t)] \quad U_b(p) = \mathcal{L}[u_b(t)]$$

et  $G_0 = 100 \text{ s}^{-1} \quad \tau = 1,0 \text{ ms}$

Que représente le facteur  $1/p$  dans la transmittance  $G_a(p)$  ?

### 2. Modélisation de l'ensemble : C.N.A. , processus analogique , C.A.N.

Pour établir la transmittance en z de l'ensemble constitué par le Convertisseur Numérique Analogique, le processus analogique et le Convertisseur Analogique Numérique, on utilise les transformées en z des séquences suivantes :

$$E(z) = Z\{e_k\}, \quad S(z) = Z\{s_k\}, \quad U(z) = Z\{u_k\} \quad \text{et} \quad \varepsilon(z) = Z\{\varepsilon_k\}.$$

On néglige le temps de calcul et les temps de conversion.

Pour tenir compte du C.N.A., le processus analogique  $G_a(p)$  est associé à un bloqueur

d'ordre zéro, de transmittance en  $p$  :  $B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$  et à un échantillonneur fonctionnant à la fréquence  $F_e = 1/T_e$  avec  $T_e = 0,30$  ms ( fig.7 ).

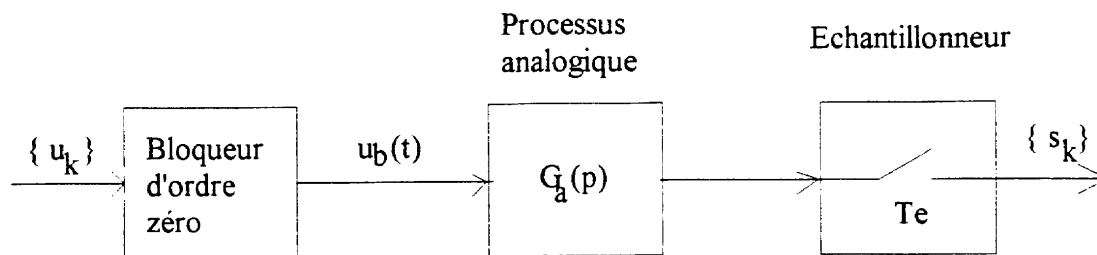


Figure 7

Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $G(z) = \frac{S(z)}{U(z)}$  (cf. annexe ) et montrer

qu'elle s'exprime de la façon suivante :  $G(z) = \frac{\alpha z + \beta}{(z - 1)(z - z_0)}$ .

Exprimer  $\alpha$  ,  $\beta$  et  $z_0$  en fonction de  $T_e$  ,  $\tau$  et  $G_0$ .

### 3. Transmittance et stabilité de l'asservissement

Le schéma bloc de l'asservissement numérique est donc le suivant (fig.8) :

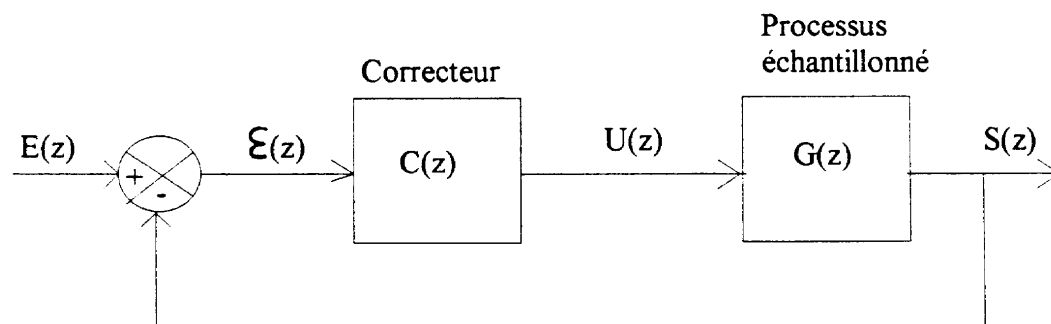


Figure 8

On choisit un correcteur à action proportionnelle soit  $C(z) = K$  avec  $K > 0$ .



### 3.1. Transmittance du système en boucle fermée

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée  $H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$  et la mettre sous la forme

$$\text{suivante : } H(z) = \frac{K(\alpha z + \beta)}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

Donner les expressions des coefficients  $a_1$  et  $a_0$  en fonction de  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $z_0$ .

### 3.2. Stabilité du système en boucle fermée

3.2.1. Rappeler la condition générale de stabilité d'un système numérique caractérisé par sa

fonction de transfert en  $z$  :  $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ ,  $D(z)$  étant un polynôme en  $z$  d'ordre  $n$ .

3.2.2. Avec les valeurs numériques données, on obtient pour la transmittance en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{K(4,1 \cdot 10^{-3} z + 3,7 \cdot 10^{-3})}{z^2 + z(4,1 \cdot 10^{-3} K - 1,74) + (0,74 + 3,7 \cdot 10^{-3} K)}$$

Calculer la valeur maximale de  $K > 0$ , notée  $K_{\max}$ , à partir de laquelle le système devient instable en boucle fermée en utilisant la troisième inéquation du critère de Jury ( cf. annexe ), c'est-à-dire  $|a_0| < 1$ .

### 4. Réponse de l'asservissement à une rampe

4.1. Montrer que la transformée en  $z$ ,  $\mathcal{E}(z)$ , du signal d'erreur numérique  $\{\varepsilon_k\}$  est donnée

$$\text{par : } \mathcal{E}(z) = \frac{1}{1 + KG(z)} E(z)$$

4.2. On applique à l'entrée du système asservi une rampe de pente  $d$ , avec  $d = 100$  V/s soit :  $\{e_k\} = \{d k T_e T_k\}$ .

4.2.1. Etablir l'expression de  $\mathcal{E}(z)$ , on utilisera la table des transformées en  $z$  fournie en annexe.

4.2.2. A l'aide du théorème de la valeur finale, calculer l'erreur de traînage :  $\varepsilon_T = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k$  en fonction de  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $z_0$ ,  $T_e$  et  $d$ .

On rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$  si cette limite existe.

4.2.3. Sachant que nous avons la relation suivante entre les coefficients précédents :

$$\alpha + \beta = (1 - z_0) G_0 T_e, \text{ montrer que l'erreur de traînage est donnée par : } \varepsilon_T = \frac{d}{KG_0}$$

### 4.3. Réglage de la valeur de K

Le signal analogique image de la position de la sonde  $s(t)$  est codé à l'aide d'un C.A.N. à 8 bits. La plage de fonctionnement du C.A.N. est de 10 V.

4.3.1. Calculer la valeur du quantum  $q$  du C.A.N.

4.3.2. Calculer la valeur de K pour obtenir une erreur de traînage  $\varepsilon_T$  égale à un quantum  $q$  du C.A.N.

Le système bouclé est-il stable pour cette valeur de K ?

## ANNEXE

## 1. Table de correspondance entre transformée de LAPLACE , F(p) et transformée en z , F(z)

La période d'échantillonnage étant  $T_e$  , alors :

F(p)	F(z)
$(1 - e^{-T_e p})F(p)$	$(1-z^{-1})F(z)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{zT_e}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{(p+a)}$	$\frac{z}{z - e^{-aT_e}}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT_e})}{(z-1)(z - e^{-aT_e})}$
$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$\frac{zT_e}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT_e})z}{a(z-1)(z - e^{-aT_e})}$

## 2. Transformée en z de quelques signaux numériques

$X(z) = Z\{x_k\}$  , la période d'échantillonnage étant  $T_e$  alors :

$\{x_k\}$	$X(z)$
impulsion unité : $\{\delta_k\}$	1
échelon unité : $\{\Gamma_k\}$	$\frac{z}{z-1}$
rampe de pente a : $\{a k T_e \Gamma_k\}$	$aT_e \frac{z}{(z-1)^2}$

## 3. Critère de JURY pour une transmittance en z du second ordre .

Soit :  $H(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{N(z)}{D(z)}$  : H(z) est la fonction de transfert d'un système stable si :

$$D(1) > 0 \text{ et } D(-1) > 0 \text{ et } |a_0| < 1 .$$

Document Réponse ( à rendre avec la copie )

