

Module : Statistique de Gestion

Niveau : 1^{ère} année Master (TC)

Groupes : 1, 2, 7 et 8



Année Académique : 2013/2014

Enseignant : KHERRI Abdenacer

Site web : www.sg-hec.jimdo.com

Support pédagogique de cours N° 04 :

TEST D'HYPOTHESES

Plan du cours :

1. Introduction.
2. Définition.
3. Terminologie.
4. Symboles utilisés.
5. Vocabulaire de test d'hypothèses.
6. Catégories des tests d'hypothèses.
 - 6.1. Test simple.
 - 6.2. Test multiple.
 - a. Test unilatéral.
 - Test unilatéral à droite.
 - Test unilatéral à gauche.
 - b. Test bilatéral.
 - 6.3. Test d'homogénéité.
 - 6.4. Test d'ajustement.
 - 6.5. Test d'indépendance.
7. Les étapes d'un test d'hypothèses.
8. Formulation des hypothèses.
9. Moyenne de la population (sigma connu).
10. Moyenne de la population (sigma inconnu).
11. Proportion de la population.
12. Exemple de synthèse.
13. Synthèse.



1. Introduction :

Ce cours constitue un prolongement direct de l'étude de l'échantillonnage et de l'estimation, il s'agit ici aussi d'une initiation à l'utilisation de méthodes statistiques permettant de prendre une décision : on accepte ou on refuse une hypothèse.

La notion de test d'hypothèses a été développée dans la première moitié XX^e siècle par un mathématicien anglais "Egon Pearson"* (1895-1980) et un mathématicien d'origine polonaise "Jerzy Neyman" (1894-1981)¹.

Depuis quelques décennies, nous assistons à une "arrivé en force" des méthodes statistiques dans le domaine de la gestion, lequel conduit à la prise de décision.

En particulier, l'augmentation des échanges commerciaux et des liens économiques entre les pays, la statistique de gestion trouve là un immense champ d'application.

Cela se traduit par des réglementations définissant dans chaque cas particulier une procédure destinée à préciser sans ambiguïté :

- Comment un ou plusieurs échantillons doivent être prélevés dans la population étudiée ?
- Quelles mesures doivent être effectuées sur ce ou ces échantillons ?
- Quelles décision doit être prise à propos de l'ensemble de la population étudiée, suivant les résultats obtenus sur le ou les échantillons ?

Une telle procédure s'appelle en statistique un *test d'hypothèse*.

D'une manière générale, il s'agit, à partir de l'étude d'un ou de plusieurs échantillons, de préciser comment prendre des décisions concernant l'ensemble de la population.

Naturellement, comme on ne dispose pas de renseignements sur l'ensemble de la population, on risque de se tromper en prenant la décision, et il importe de contrôler au maximum tout risque d'erreur.

*. "Egon Pearson" est le fils de statisticien anglais "Karl Pearson" (1857-1936).

1. Bernard Velerlant, Geneviève Saint-Pierre, *Statistiques et probabilités (manuel de cours, exercices corrigés et sujets d'examens)*, édition BERTI, Alger, Algérie, 2008, P187.

2. Définition :

Pour bien comprendre le sens du terme "test d'hypothèse", on va citer 3 définitions ensuite on donne une définition de synthèse.

Déf (01) : Un test d'hypothèse est une procédure statistique qui utilise les données d'un échantillon pour déterminer si une assertion au sujet de la valeur d'un paramètre de la population doit être ou non rejetée¹.

Déf (02) : Un test d'hypothèse est un procédé d'inférence permettant de contrôler (accepter ou rejeter) à partir de l'étude d'un ou plusieurs échantillons aléatoires, la validité d'hypothèses relatives à une ou plusieurs populations².

Déf (03) : Les tests statistiques constituent une approche décisionnelle de la statistique inférentielle. Un tel test a pour objet de décider sur la base d'un échantillon si une caractéristique de la loi mère (ou de la population) répond ou non à une certaine spécification que l'on appelle hypothèse³.

Donc on peut dire que :

Le test d'hypothèses est une procédure statistique qui permet de faire un choix entre deux hypothèses relatives à la valeur d'un paramètre de la population, en se basant sur les données d'un échantillon aléatoire prélevé dans cette population.

hypothesis testing

إختبار الفرضيات

test d'hypothèses

Hypothesentest

Prueba de hipótesis

ipotesi di prova

проверки гипотезы

хипотеза тест

1 . Anderson et autres, *Statistique pour l'économie et la gestion*, 3^{ème} édition, édition De Boeck, Bruxelles, Belgique, 2010, P468.

2 . <http://mathsv.univ-lyon1.fr/cours/pdf/stat/Chapitre7.pdf>

3 . Michel Lejeune, *Statistique (la théorie et ses applications)*, 2^{ème} édition, édition Springer, Paris, France, 2010, P201.

3. Terminologie :

Terme	Définition
Hypothèse nulle	Hypothèse supposée a priori vraie dans la procédure de test d'hypothèses.
Hypothèse alternative	Hypothèse considérée comme vraie si l'hypothèse nulle est rejetée.
Erreur de première espèce	Erreur commise en rejetant H_0 alors qu'elle est vraie.
Erreur de seconde espèce	Erreur commise en acceptant H_0 alors qu'elle est fausse.
Seuil de signification	Probabilité de commettre une erreur de première espèce lorsque l'hypothèse nulle est vraie et satisfaite avec égalité.
Test unilatéral	Test d'hypothèse dans lequel la région de rejet de l'hypothèse nulle se situe dans une des queues de la distribution d'échantillonnage de la statistique de test.
Test bilatéral	Test d'hypothèse dans lequel la région de rejet de l'hypothèse nulle se situe dans deux queues de la distribution d'échantillonnage de la statistique de test.
Statistique de test	Statistique dont la valeur permet de déterminer si l'hypothèse nulle peut être rejetée.
Valeur critique	Valeur comparée à la statistique de test pour déterminer si l'hypothèse nulle doit être rejetée.
Valeur p	Probabilité, calculée en utilisant la statistique de test, qui mesure le soutien (ou l'absence de soutien) fourni par l'échantillon à l'hypothèse nulle. Plus les valeurs p sont petites, plus il y a de preuves contre l'hypothèse nulle.

4. Symboles utilisés :

Symbole	Signification
H_0	Hypothèse nulle
H_1	Hypothèse alternative
α	Erreur de première espèce / seuil de signification
β	Erreur de seconde espèce
$1 - \beta$	Puissance de la statistique de test

5. Vocabulaire de test d'hypothèses :

Soit une hypothèse H_0 concernant une population, sur la base des résultats de l'échantillon extraits de cette population on est amené à accepter ou rejeter l'hypothèse H_0 .

- Les règles de décisions sont appelées *tests statistiques*.
- H_0 désigne l'hypothèse dite hypothèse nulle.
- H_1 désigne l'hypothèse dite hypothèse alternative.

On a :

- H_0 vraie H_1 fausse.
- H_0 fausse H_1 vraie.

Il y a 4 solutions dont seulement les deux premières sont justes :

- H_0 est vraie et on a choisi H_0
- H_0 est fausse et on a rejeté H_0
- H_0 est vraie et on a rejeté H_0
- H_0 est fausse et on a choisi H_0

On distingue entre deux types d'erreurs :

- Si H_0 est vraie et on l'a rejetée, on dit que l'on a une erreur de 1^{ère} espèce. La probabilité de l'erreur de 1^{ère} espèce est notée α .
- Si H_1 est vraie et on a accepté H_0 , on dit que l'on a une erreur de 2^{ème} espèce. La probabilité de l'erreur de 2^{ème} espèce est notée β .

Sachant que α est le seuil de signification du test et $1 - \alpha$ son seuil de confiance.

Exemple :

On suppose que la taille moyenne des étudiants de la première année master à **HEC Alger** est environ **168 cm**.

Les phrases suivantes sont considérées comme des hypothèses sur cette moyenne :

La phrase en mots	La phrase en statistique
La moyenne de la taille est 168 cm
La moyenne de la taille est inférieure à 168 cm
La moyenne de la taille est supérieure à 168 cm
La moyenne de la taille est différente à 168 cm

6. Catégories des tests d'hypothèses¹ :

6.1. Test simple :

Un test est dit simple si on veut choisir entre deux valeurs d'un paramètre θ (θ_1 et θ_2), on a :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_1 \\ H_1 : \theta = \theta_2 \end{cases}$$

6.2. Test multiple :

a. Test unilatéral :

- Test unilatéral à droite (test de supériorité) :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_1 \\ H_1 : \theta > \theta_1 \end{cases}$$

- Test unilatéral à gauche (test d'infériorité) :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_1 \\ H_1 : \theta < \theta_1 \end{cases}$$

b. Test bilatéral :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_1 \\ H_1 : \theta \neq \theta_1 \end{cases}$$

6.3. Test d'homogénéité :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_1 \\ H_1 : \theta \neq \theta_2 \end{cases}$$

Où θ_1 et θ_2 sont deux valeurs d'un même paramètre dans deux populations différentes.

6.4. Test d'ajustement :

$$\begin{cases} H_0 : F(x) = F_0(x) \\ H_1 : F(x) \neq F_0(x) \end{cases}$$

Où $F(x)$ est la fonction de répartition de la variable échantillonnée et $F_0(x)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire connue.

6.5. Test d'indépendance :

$$\begin{cases} H_0 : X \text{ et } Y \text{ sont deux variables aléatoires indépendantes} \\ H_1 : X \text{ et } Y \text{ ne sont pas des variables indépendantes} \end{cases}$$

1. Khaled KHALDI, Méthodes statistiques (rappels de cours et exercices corrigés), 6^{ème} édition, édition OPU, Alger, Algérie, 2010, P113.

7. Les étapes d'un test d'hypothèse¹ :

- Formuler l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative.
- Choisir le seuil de signification du test.
- Déterminer la distribution pour effectuer le test.
- Définir la région critique.
- Etablir la règle de décision.
- Faire les calculs nécessaires.
- Prendre la décision.

8. Formulation des hypothèses :

Il faut être très attentif à la formulation des hypothèses, afin d'être sûr qu'elles sont appropriées et que les conclusions du test d'hypothèses fournissent bien les informations souhaitées par le chercheur ou le responsable.

Pour effectuer un test d'hypothèses, on commence par faire une hypothèse sur un paramètre de la population considérée, cette hypothèse est appelée "*hypothèse nulle*" est notée " H_0 ". On définit ensuite une autre hypothèse appelée "*hypothèse alternative*" qui correspond à l'opposé de ce qui est établi dans l'hypothèse nulle, l'hypothèse alternative est notée " H_1 " ou " H_a " ou " H_A ", mais nous au cours de cette formation on va utiliser la notation " H_1 ".

NB : H_0 doit être une égalité².

Formulation des hypothèses et type de test

Exemple (01) :

Supposez qu'une nouvelle méthode de production sera utilisée si un test d'hypothèses permet de conclure que la nouvelle méthode réduit le coût de production horaire moyen.

Etablir les hypothèses nulle et alternative si le coût moyen de la méthode de production actuelle est de **2200 DA** par heure.

Quel est le type de test dans ce cas ?

 Réponse :

.....

.....

.....

.....

1 . <http://www.er.uqam.ca/nobel/r30574/PSY1300/C8P4.html> (site consulté le 29/12/2012 à 11h30)

2. Bernard Velerlant, Geneviève Saint-Pierre, *op.cit.*, P191.

Exemple (02) :

L'étiquette d'une bouteille de **75 cl** de jus d'orange indique que le jus d'orange contient en moyenne, au plus un gramme de matière grasse.

Formuler les hypothèses nulles et alternative appropriées.

Quel est le type de test dans ce cas ?

 **Réponse :**

.....

.....

.....

.....

Exemple (03) :

Le responsable pédagogique de module "statistique de gestion" à **HEC Alger** a dit que le taux de réussite en ce module est **80 %**.

Pour vérifier cette information, on procède à un test d'hypothèse. Formuler les hypothèses nulle et alternative appropriées.

Quel est le type de test dans ce cas ?

 **Réponse :**

.....

.....

.....

.....

9. Moyenne de la population (σ connu) :

Le tableau suivant résume les tests d'hypothèses relatifs à la moyenne d'une population (cas où σ est connu) :

	Test unilatéral inférieur	Test unilatéral supérieur	Test bilatéral
Hypothèses	$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$
Statistique de test	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
Règle de rejet : approche par la valeur p	Rejet de H_0 si la valeur $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si la valeur $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si la valeur $p \leq \alpha$
Règle de rejet : approche par la valeur critique	Rejet de H_0 si $Z \leq -Z_\alpha$	Rejet de H_0 si $Z \geq Z_\alpha$	Rejet de H_0 si $Z \leq -Z_{\alpha/2}$ ou $Z \geq Z_{\alpha/2}$

Tests d'hypothèses relatifs à la moyenne d'une population (cas où σ est connu)

Exemple (01) :

Considérer le test d'hypothèses suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu < 20 \end{cases}$$

Un échantillon de taille $n = 50$ fournit une moyenne d'échantillon de **19,4**. L'écart-type de la population est égale à **2**.

- Calculer la valeur de la statistique de test.
- Quelle est la valeur p ?
- Au seuil de signification $\alpha = 0,05$, quelle est votre conclusion ?
- Quelle est la règle de rejet obtenue par la valeur critique ? quelle est votre conclusion ?

 Réponse :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple (01) :

Considérer le test d'hypothèses suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu \neq 15 \end{cases}$$

Un échantillon de taille $n = 50$ fournit une moyenne d'échantillon de **14,15**. L'écart-type de la population est égale à **3**.

- a) Calculer la valeur de la statistique de test.
- b) Quelle est la valeur p ?
- c) Au seuil de signification $\alpha = 0,05$, quelle est votre conclusion ?
- d) Quelle est la règle de rejet obtenue par la valeur critique ? quelle est votre conclusion ?

 **Réponse :**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. Moyenne de la population (σ inconnu) :

Le tableau suivant résume les tests d'hypothèses relatifs à la moyenne d'une population (cas où σ est inconnu) :

	Test unilatéral inférieur	Test unilatéral supérieur	Test bilatéral
Hypothèses	$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$
Statistique de test	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
Règle de rejet : approche par la valeur p	Rejet de H_0 si la valeur $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si la valeur $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si la valeur $p \leq \alpha$
Règle de rejet : approche par la valeur critique	Rejet de H_0 si $t \leq -t_\alpha$	Rejet de H_0 si $t \geq t_\alpha$	Rejet de H_0 si $t \leq -t_{\alpha/2}$ ou $t \geq t_{\alpha/2}$

Tests d'hypothèses relatifs à la moyenne d'une population (cas où σ est inconnu)

Exemple (01) :

Considérer le test d'hypothèses suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 12 \\ H_1 : \mu > 12 \end{cases}$$

Un échantillon de taille $n = 25$ fournit une moyenne d'échantillon de $\bar{x} = 14$ et un écart-type $s = 4,32$.

- Calculer la valeur de la statistique de test.
- Quelle est la valeur p ?
- Au seuil de signification $\alpha = 0,05$, quelle est votre conclusion ?
- Quelle est la règle de rejet en utilisant la valeur critique ? quelle est votre conclusion ?

Réponse :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple (02) :

Considérer le test d'hypothèses suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 18 \\ H_1 : \mu \neq 18 \end{cases}$$

Un échantillon de taille $n = 48$ fournit une moyenne d'échantillon de $\bar{x} = 17$ et un écart-type $s = 4,5$.

- Calculer la valeur de la statistique de test.
- Quelle est la valeur p ?
- Au seuil de signification $\alpha = 0,05$, quelle est votre conclusion ?
- Quelle est la règle de rejet en utilisant la valeur critique ? quelle est votre conclusion ?

 Réponse :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

11. Proportion de la population :

Le tableau suivant résume les tests d'hypothèses relatifs à la proportion d'une population :

	Test unilatéral inférieur	Test unilatéral supérieur	Test bilatéral
Hypothèses	$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$
Statistique de test	$Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$
Règle de rejet : approche par la valeur p	Rejet de H_0 si la valeur $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si la valeur $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si la valeur $p \leq \alpha$
Règle de rejet : approche par la valeur critique	Rejet de H_0 si $Z \leq -Z_\alpha$	Rejet de H_0 si $Z \geq Z_\alpha$	Rejet de H_0 si $Z \leq -Z_{\alpha/2}$ ou $Z \geq Z_{\alpha/2}$

Tests d'hypothèses relatifs à la proportion d'une population

Exemple (01) :

Considérer le test d'hypothèses suivant :

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,2 \\ H_1 : p \neq 0,2 \end{cases}$$

Un échantillon de taille $n = 400$ fournit une proportion d'échantillon de $\bar{p} = 0,175$.

- Calculer la valeur de la statistique de test.
- Quelle est la valeur p ?
- Au seuil de signification $\alpha = 0,05$, quelle est votre conclusion ?
- Quelle est la règle de rejet en utilisant la valeur critique ? quelle est votre conclusion ?

 Réponse :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12. Exemple se synthèse :

Exemple de synthèse (approche par intervalle de confiance pour effectuer un test d'hypothèses)

Une grande surface vend du matériel photographique, on note X la variable aléatoire qui, à chaque ticket de caisse prélevé au hasard dans le stock de tickets d'un mois associe son montant en unités monétaires.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 550$ et d'écart-type $\sigma = 195$.

À la suite d'une campagne promotionnelle d'un concurrent, le responsable de la grande surface redoute que le montant moyen des tickets (donc des ventes) soit modifié.

Afin de contrôler que la moyenne des achats reste égale à **550 UM** il se propose de construire un test d'hypothèses bilatérale.

On désigne par \bar{X} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de **50** tickets de caisse, associe la moyenne des montants en unités monétaires de ces tickets (le stock de tickets est assez important pour qu'on puisse assimiler des prélèvements à des tirages de **50** avec remise).

On suppose que, sous l'hypothèse nulle, la variable aléatoire suit la loi normale de la moyenne $\mu = 550$ et d'écart-type $\sigma = \frac{195}{\sqrt{50}}$. Le seuil de signification du test est fixé à **5 %**.

- Formuler les hypothèses.
- Déterminer le nombre réel positif h tel que $P(550 - h < \bar{X} < 550 + h) = 0,95$
- Déterminer la région d'acceptation et la région critique (de rejet).
- Quelle est la règle de décision ?
- Si le prélèvement d'un échantillon de **50** tickets donne une moyenne $\bar{x} = 580 \text{ UM}$, quelle est votre conclusion ?

 **Réponse :**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

13. Synthèse :

Tableau (01) : Erreurs et conclusions correctes d'un test d'hypothèse.

Etat réel \ Décision statistique	H_0 vraie	H_0 fausse
	H_0 acceptée	Conclusion correcte
H_0 rejetée	Erreur de première espèce	Conclusion correcte

Tableau (02) : Erreur de première espèce et de deuxième espèce.

Etat réel \ Décision statistique	H_0 vraie	H_0 fausse
	Acceptation	$1 - \alpha$
Rejet	α (erreur I)	$1 - \beta$

Tableau (03) : la valeur critique (unilatérale et bilatérale)

H_1	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0, \mu < \mu_0$
α	$Z_{\alpha/2}$	Z_α
10 %	1,645	1,282
5 %	1,960	1,645
1 %	2,576	2,326