الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2018

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

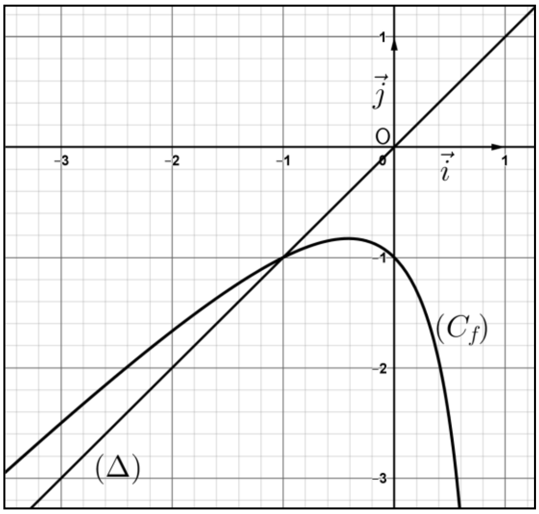
f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=-3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل).



1) أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\leqslant u_n<-1$.

3) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1\geqslant\frac{3}{4}(u_n+1)$.

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+1\geqslant-2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leqslant(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$

واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقطتين $A(1;1;3)$ و $B(1;0;2)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط O ، A و B ليست في استقامية.

ب) تحقق أنّ $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) ثم عيّن معادلة ديكارتية له.

2) لتكن (Δ) مجموعة النقط M من الفضاء التي احداثياتها $(x;y;z)$ وتحقق المعادلة التالية:

$$(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$$

- بيّن أنّ المجموعة (Δ) هي تقاطع المستويين المحوريين للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمجموعة (Δ).

3) لتكن M نقطة كيفية من الفضاء

- برهن صحة التكافؤ التالي: $(M\in(\Delta))$ يكافئ $(OM=AM=BM)$ ثم استنتج إحداثيات النقطة Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAB .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi]$

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$$

II. A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=\sin\theta+i\cos\theta$ و $z_D=\overline{z_C}$ (يرمز $\overline{z}_c$ الى مرافق z_c)

1) اكتب الأعداد z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي.

2) E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث $z_E=\dfrac{z_A}{z_B}$.

- بيّن أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$ ونسبته $\left(2\sqrt{2}-2\right)$.

- عيّن قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S .

4) نضع $\theta=\dfrac{-3\pi}{4}$.عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x+1-\dfrac{1}{\ln x}\ ; \quad x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$

(يرمز بـ $\ln$ الى اللوغاريتم النيبيري)

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ بيّن أنّ f مستمرة عند 0 بقيم أكبر.

ب/ احسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α حيث $1,49<\alpha<1,5$

ثم بيّن أنّ معادلة المماس للمنحني (C_f) في النقطة ω تكتب على الشكل $y=\left(\alpha+3+\dfrac{1}{\alpha}\right)(x-\alpha)$

5) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $h(x)=1-x+x\ln x$.

أ/ بيّن أنّ الدالة h متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل $x>1$: $f(x)-x+\dfrac{1}{x\ln x}=\dfrac{h(x)}{x\ln x}$

و استنتج أنه من أجل $x>1$: $x-\dfrac{1}{x\ln x}<f(x)<x+1$.

7) $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\alpha$ و $x=\text{e}$.(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

- بيّن أنّ $\dfrac{1}{2}(\text{e}^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)<\mathcal{A}<\dfrac{1}{2}(\text{e}-\alpha)(\text{e}+\alpha+2)$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على (03) صفحات (من الصفحة 4 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) α و β عددان طبيعيان بحيث: $\begin{cases} \alpha+\beta=4035 \\ \alpha-\beta=1 \end{cases}$

- عيّن العددين α و β، ثم بيّن أنّ العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

2) عيّن كل الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$

3) عيّن الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة: $\begin{cases} a\equiv 2019[2017] \\ a\equiv 2019[1009] \end{cases}$.

4) أ) n عدد طبيعي، ادرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9.

ب) L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي : $L=\overline{\underbrace{111...1}_{\text{2018 مرة}}}$

- عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد $42L$ على 9.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1،1،2،2،2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3،2،-3 وكرية بيضاء مرقمة بـ:-1

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على أربع كريات من نفس اللون".

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله .

ب) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

ج) احسب احتمال الحادثة :" $X^2-X>0$ " .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) m عدد حقيقي ، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+(m+1)z+(2m-1)=0.....(E)$$

- عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين.

2) نضع $m=3$ ، حل المعادلة (E).

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و E التي

لاحقاتها $z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ ، $z_C=\alpha$ و $z_E=\sqrt{3}$ ، حيث α عدد حقيقي و $-2<\alpha$.

- بيّن أنّ قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $\left(-2+\sqrt{3}\right)$.
- نضع في كل ما يأتي $z_C=-2+\sqrt{3}$:

4) اكتب العدد المركب: $\dfrac{z_C-z_E}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن :

أ) المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

ب) النقط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

5) ليكن r الدوران الذي يحوّل النقطة B إلى C و يحوّل C إلى A ، عبارته المركبة هي:

$z'=az+\left(\dfrac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ حيث a عدد مركب.

أ) احسب العدد المركب a ثم استنتج زاوية الدوران r.

ب) تحقق أنّ النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ،

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) بيَن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.9<\alpha<1$ ،

و استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)=-1$ (يمكن وضع $t=-\dfrac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$

مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ : $h(x)=\dfrac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0\,;+\infty[$.

ب) تَحقّق أن $f(x)-x=(1+x)\,h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)\simeq 1.73$).

5) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث: $u_n=\dfrac{n}{n+1}f\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{n^2}{n+1}$.

أ) اكتب u_n بدلالة n ثم بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right).$$

انتهى الموضوع الثاني