

# Analyse complexe

Notes de cours

André Giroux

Département de mathématiques et statistique

Université de Montréal

Juin 2004

## Table des matières

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>LES NOMBRES COMPLEXES</b>	<b>4</b>
2.1	Propriétés algébriques . . . . .	4
2.2	Propriétés topologiques . . . . .	8
2.3	L'infini en analyse complexe . . . . .	13
2.4	Exercices . . . . .	14
<b>3</b>	<b>LES FONCTIONS COMPLEXES</b>	<b>17</b>
3.1	Fonctions continues . . . . .	17
3.2	Polynômes et fonctions rationnelles . . . . .	20
3.3	La fonction exponentielle . . . . .	23
3.4	Application aux séries de Fourier . . . . .	26
3.5	Exercices . . . . .	27
<b>4</b>	<b>FONCTIONS HOLOMORPHES</b>	<b>29</b>
4.1	Exercices . . . . .	33
<b>5</b>	<b>LE CALCUL INTÉGRAL</b>	<b>34</b>
5.1	Propriétés des courbes . . . . .	34
5.2	Intégrales curvilignes . . . . .	37
5.3	Les théorèmes de Cauchy . . . . .	39
5.4	Le logarithme . . . . .	43
5.5	Exercices . . . . .	45
<b>6</b>	<b>PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DES FONCTIONS HOLOMORPHES</b>	<b>49</b>
6.1	L'analycité . . . . .	49
6.2	La propriété des zéros isolés . . . . .	51
6.3	La propriété du module maximum . . . . .	52
6.4	Exercices . . . . .	53
<b>7</b>	<b>LE CALCUL DES RÉSIDUS</b>	<b>55</b>
7.1	Singularités isolées . . . . .	55
7.2	Résidus . . . . .	59
7.3	La propriété de l'application ouverte . . . . .	60
7.4	Application aux transformées de Fourier . . . . .	63
7.5	Application au calcul d'intégrales diverses . . . . .	65
7.6	Exercices . . . . .	70

<b>8</b>	<b>PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES FONCTIONS HO-</b>	
	<b>LOMORPHES</b>	<b>73</b>
8.1	Transformations conformes . . . . .	73
8.2	Les transformations homographiques . . . . .	75
8.3	Exercices . . . . .	79
<b>9</b>	<b>FONCTIONS HARMONIQUES</b>	<b>81</b>
9.1	L'équation de Laplace . . . . .	81
9.2	Propriétés . . . . .	83
9.3	Application aux EDP . . . . .	84
9.4	Exercices . . . . .	88

## Table des figures

1	Les racines 7 <sup>ième</sup> de l'unité . . . . .	7
2	$w = z^2$ , les hyperboles . . . . .	20
3	$w = z^2$ , les paraboles . . . . .	21
4	Le sens de parcours positif . . . . .	36
5	Le théorème de Cauchy . . . . .	39
6	La formule de Cauchy . . . . .	41
7	Le théorème de Laurent . . . . .	55
8	Une transformée de Fourier . . . . .	64
9	Une transformée de Fourier . . . . .	64
10	Un calcul d'intégrale . . . . .	66
11	Un calcul d'intégrale . . . . .	67
12	Un calcul d'intégrale . . . . .	68
13	Angle entre deux courbes . . . . .	73
14	Une transformation homographique . . . . .	76
15	Le noyau de Poisson . . . . .	86
16	Un problème de Dirichlet . . . . .	88

# 1 INTRODUCTION

L'analyse est l'étude approfondie du calcul différentiel et intégral. Ce cours porte sur le calcul différentiel et intégral des fonctions complexes d'une variable complexe. Il s'agit d'un premier cours sur le sujet où les propriétés des nombres complexes et l'extension aux variables complexes des fonctions élémentaires d'une variable réelle sont tout d'abord présentées. On développe ensuite leur calcul différentiel et intégral et on étudie les propriétés supplémentaires de ces fonctions qui en découlent. Quelques applications aux séries et aux intégrales de Fourier sont enfin exposées.

L'étudiant est réputé être familier avec le calcul différentiel et intégral des fonctions d'une variable réelle et bien connaître les propriétés des fonctions élémentaires (polynômes et fonctions rationnelles, exponentielle et logarithme, fonctions trigonométriques directes et inverses).

Le cours contient des démonstrations rigoureuses et complètes de tous ses théorèmes et l'étudiant sérieux devrait fournir des solutions de même calibre aux exercices proposés à la fin de chaque chapitre.

## 2 LES NOMBRES COMPLEXES

L'ensemble  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  des entiers naturels est fermé sous l'addition  $m + n$  et la multiplication  $mn$  mais pour pouvoir résoudre pour  $x$  toute équation du type

$$x + m = n, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

il faut passer aux entiers relatifs  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Et pour être capable de résoudre pour  $x$  toute équation de la forme

$$px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

il faut aller aux nombres rationnels  $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ . Ce dernier système est fermé sous les quatre opérations de l'arithmétique mais on ne peut y résoudre pour  $x$  toute équation du type

$$x^2 = a, \quad a \in \mathbb{Q}.$$

Les nombres réels  $\mathbb{R}$  permettent de résoudre certaines de ces équations mais pas toutes. Ils forment un système fermé sous les quatre opérations qui est de plus complet au sens où toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui satisfait la condition de Cauchy

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} |x_m - x_n| = 0$$

est convergente mais on ne peut par exemple y obtenir une solution de l'équation

$$x^2 + 1 = 0.$$

Il faut pour cela construire les nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

### 2.1 Propriétés algébriques

Si  $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , soient

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

et

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Ces opérations créent un corps commutatif, le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes;  $(0, 0)$  est l'élément neutre pour l'addition,  $(1, 0)$  est l'élément neutre pour la multiplication et l'inverse multiplicatif de  $(x, y) \neq (0, 0)$  est

$$\left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

En identifiant  $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et en posant  $i = (0, 1)$ ,

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}.$$

On calcule donc avec les nombres complexes comme avec les nombres réels en remplaçant partout  $i^2$  par  $-1$ .

Exemple. Si  $n \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$

de telle sorte que

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \pmod{4}, \\ 1 + i & \text{si } n = 1 \pmod{4}, \\ i & \text{si } n = 2 \pmod{4}, \\ 0 & \text{si } n = 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Le nombre réel  $x$  est la **partie réelle** de  $z$ , le nombre réel  $y$  sa **partie imaginaire**,

$$x = \Re z, \quad y = \Im z,$$

le nombre complexe

$$\bar{z} = x - iy$$

est le **conjugué** de  $z$  et le nombre positif

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

est son **module**. On remarque que

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Exemple. Si  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  sont réels, l'équation quadratique

$$az^2 + bz + c = 0$$

admet toujours deux racines :

$$z = \begin{cases} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{si } b^2 - 4ac > 0, \\ -b/2a & \text{si } b^2 - 4ac = 0, \\ \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} & \text{si } b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

(la racine est de multiplicité deux dans le deuxième cas). On remarque que dans le troisième cas, les racines sont des nombres complexes conjugués.

Exemple. La droite d'équation  $ax + by = c$  dans le plan correspond à l'ensemble des nombres complexes qui satisfont la relation

$$\frac{a+b}{2}z + \frac{a-b}{2}\bar{z} = c,$$

le cercle  $x^2 + y^2 = r^2$  correspond aux nombres complexes tels que

$$|z| = r$$

et la parabole  $y = x^2$  à ceux qui sont liés par

$$z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + 2iz - 2i\bar{z} = 0.$$

Les nombres complexes, étant des points du plan, admettent une **forme polaire**. Si  $z \neq 0$ , on peut écrire

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où le nombre  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  est le module de  $z$  et l'angle

$$\theta = \arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0, y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y < 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \end{cases}$$

est son **argument**. Donc, par définition,

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Les formules d'addition pour les fonctions trigonométriques montrent que l'on a

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

donc que

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

et que

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

En raisonnant par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient la formule de de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Exemple. Quelques soient  $a \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $z^n = a$  admet  $n$  racines. Si  $a \neq 0$ , elles sont toutes distinctes :

$$z_k = |a|^{1/n} \left( \cos \left( \frac{\arg a}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\arg a}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right)$$

où  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Lorsque  $a = 1$ , le nombre

$$\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

est la **racine primitive**  $n^{\text{ième}}$  de l'unité :

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega_n)(z - \omega_n^2) \cdots (z - \omega_n^{n-1}).$$

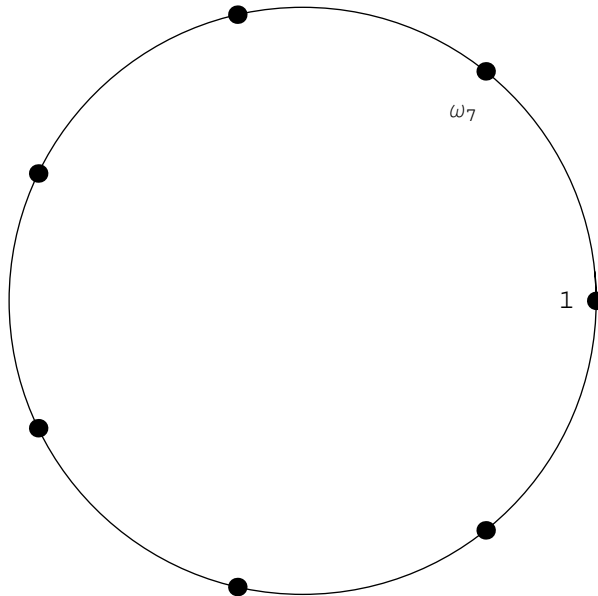


FIG. 1 – Les racines 7<sup>ième</sup> de l'unité



## 2.2 Propriétés topologiques

La distance entre  $z_1$  et  $z_2$  est

$$|z_1 - z_2|.$$

On a, quelques soient  $z_1, z_2$  et  $z_3$ ,

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|.$$

Une suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres complexes converge vers un nombre complexe  $z$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - z| = 0.$$

En vertu des inégalités

$$\sup\{|\Re z|, |\Im z|\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z \text{ si et seulement si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \Re z_n = \Re z \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \Im z_n = \Im z.$$

En conséquence, les règles de calcul concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient restent valables. De plus, le critère de Cauchy suivant lequel la suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite si et seulement si

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} |z_m - z_n| = 0$$

est encore vrai.

Exemple. Lorsque  $z_n \rightarrow z$ ,  $|z_n| \rightarrow |z|$  mais il n'est pas sûr que  $\arg z_n \rightarrow \arg z$  car l'argument d'un nombre complexe n'est pas une fonction continue de ce nombre — il y a discontinuité tout le long de l'axe réel négatif. Ainsi  $-1 - i/n \rightarrow -1$  mais  $\arg(-1 - i/n) = \arctan 1/n - \pi \rightarrow -\pi$  alors que  $\arg(-1) = \pi$ .

Il suit du critère de Cauchy qu'une condition suffisante pour la convergence d'une série de nombres complexes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$$

est sa convergence absolue (en module) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| < +\infty.$$

Dans le théorème suivant,

$$D(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$$

et

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

**Théorème 1** *Donnée une série entière à coefficients complexes  $a_k$ ,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,$$

*posons*

$$R = \frac{1}{\limsup_k |a_k|^{1/k}}$$

*(donc  $0 \leq R \leq +\infty$ ). Alors la série converge absolument dans le disque  $D(0, R)$ , de façon uniforme sur tout disque  $\overline{D}(0, r)$  tel que  $r < R$ , et elle diverge si  $|z| > R$ .*

Démonstration. Si  $R = 0$ , la série diverge pour tout  $z \neq 0$ . En effet, quel que soit  $z \neq 0$ , il y a un nombre infini d'indices  $k$  pour lesquels

$$|a_k|^{1/k} > \frac{1}{|z|}$$

et la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

ne peut converger puisque que son terme général ne tend pas vers 0.

Si  $0 < R < +\infty$ , soient  $0 < r < R$  arbitraire et  $|z| \leq r$ . Pour tout  $k$  suffisamment grand, on a

$$|a_k|^{1/k} < \frac{2}{R+r}$$

donc

$$|a_k z^k| < \left( \frac{2r}{R+r} \right)^k$$

et la série, éventuellement majorée par une série géométrique de raison inférieure à 1, est absolument et uniformément convergente. Si  $|z| > R$  par contre, il y a un nombre infini d'indices  $k$  pour lesquels

$$|a_k|^{1/k} > \frac{1}{|z|}$$

et la série diverge pour la même raison que précédemment.

Si  $R = +\infty$  enfin, le raisonnement sur la convergence du paragraphe précédent s'applique quelques soient les nombres  $R > r > 0$  et la série converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . C.Q.F.D.

Exemple. La série géométrique converge si et seulement si le module de sa raison est strictement inférieur à 1 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{si et seulement si } |z| < 1.$$

En y séparant le réel de l'imaginaire, on en tire les relations

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r^k \sin k\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

Un ensemble  $E \subseteq \mathbb{C}$  est **fermé** si la limite de toute suite convergente  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $E$  est dans  $E$ .

Exemples. Un disque  $\overline{D}(a, R)$  est fermé. Un demi-plan

$$\{z \mid az + \overline{a}z \geq 0\}$$

est fermé. Toute intersection, toute réunion finie d'ensembles fermés sont des ensembles fermés.

Un ensemble  $E \subseteq \mathbb{C}$  est **ouvert** si son complémentaire  $E^c = \mathbb{C} \setminus E$  est fermé.

**Théorème 2** Soit  $E \subseteq \mathbb{C}$ . Alors  $E$  est ouvert si et seulement si à chaque  $z_0 \in E$  correspond  $r > 0$  tel que  $D(z_0, r) \subseteq E$ .

Démonstration.

La condition est nécessaire. Si elle n'était pas satisfaite, on pourrait trouver  $z_0 \in E$  tel que chaque disque  $D(z_0, 1/n)$  contienne un point  $z_n \in E^c$ . Ces points convergeraient vers  $z_0$  et, comme  $E^c$  est fermé, on aurait  $z_0 \in E^c$  ce qui est absurde.

La condition est suffisante. Si  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $E^c$  qui converge vers un point  $z$ , il faut que  $z \in E^c$  — s'il était dans  $E$ , un petit disque centré en  $z$  ne contiendrait que des points de  $E$  et la suite donnée ne saurait y converger. C.Q.F.D.

Exemples. Un disque  $D(a, R)$  est ouvert. Un demi-plan

$$\{z \mid az + \bar{a}\bar{z} > 0\}$$

est ouvert. Toute réunion, toute intersection finie d'ensembles ouverts sont des ensembles ouverts.

Un ensemble  $E \subseteq \mathbb{C}$  est **borné** s'il existe  $R > 0$  tel que  $E \subseteq D(0, R)$ . Un ensemble  $E \subseteq \mathbb{C}$  est **compact** s'il est à la fois fermé et borné.

Exemples. Les ensembles

$$\{z \mid |\Re z| + |\Im z| \leq 1\}$$

et

$$\{z \mid \sup\{|\Re z|, |\Im z|\} \leq 1\}$$

sont compacts.

**Théorème 3 (Bolzano-Weierstrass)** Soit  $E \subseteq \mathbb{C}$ . Alors  $E$  est compact si et seulement si toute suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $E$  contient une suite partielle  $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers un point de  $E$ .

Démonstration.

La condition est nécessaire. Comme  $E$  est borné, toute suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $E$  contient une suite partielle  $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente car, de la suite donnée, on peut extraire une suite partielle dont les parties réelles convergent et, de cette suite partielle, une autre dont les parties imaginaires convergent aussi. Comme  $E$  est fermé,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_{n_k} \in E$ .

La condition est suffisante.  $E$  est fermé puisque si

$$z = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n,$$

toute les suites partielles possibles de la suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $z$  qui doit donc appartenir à  $E$ .  $E$  est borné. S'il ne l'était pas, on pourrait trouver des points  $z_n \in E$  tels que

$$|z_{n+1}| > |z_n| + 1$$

et, toute suite convergente étant bornée, cette suite n'admettrait aucune suite partielle convergente, contrairement à l'hypothèse. C.Q.F.D.

**Théorème 4 (Heine-Borel-Lebesgue)** *Soit  $E \subseteq \mathbb{C}$ . Alors  $E$  est compact si et seulement si tout recouvrement de  $E$  par des ensembles ouverts  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$  contient un sous-recouvrement fini.*

Démonstration.

La condition est nécessaire. Considérons d'abord le cas du carré  $E = [-r, r] \times [-r, r]$  de côté  $2r$ . S'il existait une famille d'ensembles ouverts  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$  recouvrant  $E$  mais dont aucune sous-famille finie ne recouvre  $E$ , l'un des quatre carrés de côté  $r$ ,  $[-r, 0] \times [-r, 0]$ ,  $[-r, 0] \times [0, r]$ ,  $[0, r] \times [-r, 0]$  et  $[0, r] \times [0, r]$  ne pourrait pas être recouvert par une sous-famille finie. De ce carré, on pourrait extraire un carré de côté  $r/2$  qui ne pourrait pas lui non plus être recouvert par une sous-famille finie. Ainsi de suite. On obtiendrait de cette façon une suite de carrés emboîtés  $E_n$ , le  $n^{\text{ième}}$  de côté  $r/2^n$ , qui ne pourraient jamais être recouverts par une sous-famille finie. L'intersection de tous ces carrés se réduirait à un point  $z \in E$ . Il existerait donc un ouvert  $O_{\alpha_z}$  de la famille contenant  $z$  donc contenant tous les carrés  $E_n$  pour  $n$  assez grand, en contradiction avec leur définition. Dans le cas général, soit  $r$  tel que  $E \subseteq [-r, r] \times [-r, r]$ . Alors les ouverts  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$  et  $E^c$  recouvrent  $[-r, r] \times [-r, r]$ . Il existe donc un sous-recouvrement fini de  $[-r, r] \times [-r, r]$  et les ensembles  $O_\alpha$  qui en font partie constituent bien évidemment un recouvrement fini de  $E$ .

La condition est suffisante.  $E$  est fermé car si une suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $E$  convergeait vers  $z \notin E$ , les complémentaires des ensembles  $\{\overline{D}(z, 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  constitueraient un recouvrement de  $E$  par des ouverts dont on ne pourrait extraire aucun sous-recouvrement fini.  $E$  est borné car s'il ne l'était pas, les ensembles  $\{D(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  constitueraient un recouvrement

de  $E$  par des ouverts dont on ne pourrait extraire aucun sous-recouvrement fini. C.Q.F.D.

Un ensemble  $E \subseteq \mathbb{C}$  est **connexe** s'il n'est pas possible de l'écrire sous la forme

$$E = EO_1 + EO_2$$

avec  $O_1$  et  $O_2$  ouverts tels que  $EO_1 \neq \emptyset$  et  $EO_2 \neq \emptyset$  (+ désigne une réunion disjointe). Un **domaine**  $D$  est un ensemble ouvert connexe.

Exemples. Un segment

$$[z_1, z_2] = \{z \mid z = (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

est connexe. Le lemniscate  $|z^2 - 1| \leq r$  est disconnexe si  $0 \leq r < 1$  et connexe si  $r \geq 1$ . Le disque unité  $D(0, 1)$  est un domaine borné, le demi-plan droit  $\Re z > 0$  est un domaine non borné.

### 2.3 L'infini en analyse complexe

Le **plan achevé**  $\overline{\mathbb{C}}$  s'obtient du plan complexe  $\mathbb{C}$  par adjonction d'un point  $\infty$  à l'infini :

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \{\infty\}.$$

Par définition,

$$z_n \rightarrow \infty \text{ si et seulement si } |z_n| \rightarrow +\infty.$$

Ainsi

$$z_n \rightarrow \infty \text{ si et seulement si } \frac{1}{z_n} \rightarrow 0,$$

$$z_n \rightarrow \infty \text{ et } w_n \rightarrow a \text{ impliquent } z_n + w_n \rightarrow \infty$$

et

$$z_n \rightarrow \infty \text{ et } w_n \rightarrow a \neq 0 \text{ impliquent } z_n w_n \rightarrow \infty.$$

Toute suite de points de  $\overline{\mathbb{C}}$  contient donc une suite partielle convergeant vers un point de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Le plan achevé  $\overline{\mathbb{C}}$  admet pour représentation géométrique une sphère (la **sphère de Riemann**) via la **projection stéréographique**. Si

$$\mathbb{S}^2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\},$$

cette projection  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  est définie par les relations

$$\Re z = \frac{\xi}{1-\zeta} \quad \text{et} \quad \Im z = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

si  $\zeta \neq 1$ , le « pôle nord »  $(0, 0, 1)$  quant à lui correspondant au point à l'infini  $\infty$  — lorsque  $\zeta \neq 1$ , ces relations expriment simplement que les points  $(0, 0, 1)$ ,  $(\xi, \eta, \zeta)$  et  $z \in \mathbb{C}$  sont alignés. La transformation réciproque  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$  est donné par

$$\xi = \frac{2\Re z}{|z|^2 + 1}, \quad \eta = \frac{2\Im z}{|z|^2 + 1} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

et l'on a

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2} = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}.$$

L'intersection d'un plan P

$$a\xi + b\eta + c\zeta = d$$

avec  $\mathbb{S}^2$  est un cercle dans l'espace qui correspond dans le plan complexe ( $z = x + iy$ ) à l'ensemble Q

$$(c - d)(x^2 + y^2) + 2ax + 2by = c + d.$$

Lorsque  $c = d$ , le cercle est passe par le pôle nord et Q est la droite

$$ax + by = c.$$

Lorsque  $c \neq d$ , Q est le cercle

$$\left(x + \frac{a}{c-d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c-d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{(c-d)^2}$$

— la condition pour que le plan P coupe  $\mathbb{S}^2$  est précisément que

$$|d| < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

## 2.4 Exercices

1. Expliquer pourquoi il est impossible de définir sur  $\mathbb{C}$  une relation d'ordre compatible avec les opérations algébriques.
2. Déterminer  $\Re(1+i)^{2k+1}$  et  $\Im(1+i)^{2k+1}$ .

3. Montrer que les racines non réelles d'une équation polynomiale à coefficients réels se présentent par paires de nombres complexes conjugués.
4. Si  $\Im z > 0$ , montrer que

$$\Re \frac{z}{1+z^2} > 0 \text{ si et seulement si } |z| < 1.$$

5. Montrer que les nombres  $z_1, z_2$  et  $z_3$  sont alignés si et seulement si

$$\Im \left( \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right) = 0.$$

6. Décrire les courbes suivantes :

- $|z| = \arg z$
- $|1+z| = |1-z|$
- $|1+z| = 2|1-z|$ .

7. Démontrer l'identité

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

En donner une interprétation géométrique.

8. Soit  $z \neq \pm 1$  un nombre complexe de module unité. Déterminer l'argument de

$$\frac{z-1}{z+1}.$$

9. Montrer que  $\cos n\theta$  peut s'exprimer comme un polynôme en  $\cos \theta$ ,

$$\cos n\theta = T_n(\cos \theta),$$

où  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$  — le  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Tchebychev de première espèce. Calculer  $T_0, T_1$  et  $T_2$ . Établir la relation de récurrence suivante :

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

10. Résoudre les équations  $(z-1)^3 - 1 = 0$ ,  $z^4 + 2 = 0$  et  $z^5 - 1 = i$ .
11. Résoudre l'équation  $(1+z)^5 = (1-z)^5$ .
12. Soient  $\omega_n$  la racine primitive  $n^{\text{ième}}$  de l'unité et  $k \in \mathbb{N}$ . Calculer

$$1 + \omega_n^k + \omega_n^{2k} + \dots + \omega_n^{(n-1)k}$$

et

$$1 - \omega_n^k + \omega_n^{2k} + \dots + (-1)^{n-1} \omega_n^{(n-1)k}.$$



13. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n i^n}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{1+i}{2} \right)^n.$$

14. Calculer

$$\Re \left( \sum_{k=n}^{+\infty} (i y)^k \right), \quad |y| < 1.$$

15. Déterminer ceux des ensembles suivants qui sont des ensembles ouverts, fermés, bornés, connexes.

- $\{z \mid |z-1| < |z+1|\}$
- $\{z \mid |z-a| + |z+a| < 2r\}$ , ( $0 \geq a < r$ )
- $\{z \mid |z-a| \geq 1\}$
- $\{z \mid z^7 = 1\}$ .

16. Montrer que, dans la projection stéréographique, l'hémisphère inférieur est appliquée sur le disque  $D(0, 1)$ .

17. Dans la projection stéréographique, quelle relation y a-t-il entre les images de points antipodaux ?

### 3 LES FONCTIONS COMPLEXES

Les propriétés des fonctions continues de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  sont analogues à celles des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . La plupart de ces dernières admettent d'ailleurs une extension simple à des fonctions de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$ .

#### 3.1 Fonctions continues

Soient  $E \subseteq \mathbb{C}$  un ensemble,  $z_0 \in E$  un de ses points et  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. Les énoncés suivants sont alors équivalents :

1. Pour toute suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $E$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0 \text{ implique } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = f(z_0).$$

2. À chaque  $\epsilon > 0$  correspond  $\delta > 0$  tels que

$$z \in E \text{ et } |z - z_0| < \delta \text{ impliquent } |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Lorsqu'ils sont satisfaits, la fonction  $f$  est dite **continue** en  $z_0$ . Elle est continue sur  $E$  si elle est continue en chaque point  $z_0 \in E$ . Une fonction complexe est donc continue si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont toutes les deux. Ainsi, sommes, différences, produits, quotients et compositions de fonctions continues (lorsqu'elles sont définies) sont continues. De même, toute limite uniforme de fonctions continues est continue.

Dans la définition précédente, le nombre  $\delta$  dépend à la fois de  $z_0$  et de  $\epsilon$ . S'il peut être choisi indépendamment de  $z_0 \in E$ , on dit que  $f$  est **uniformément continue** sur  $E$ .

**Théorème 5** *Une fonction continue sur un ensemble compact y est uniformément continue.*

Démonstration. Soient  $E \subseteq \mathbb{C}$  un ensemble compact et  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Si elle n'était pas uniformément continue, il existerait  $\epsilon > 0$  tel que, quel que soit  $\delta > 0$ , on puisse trouver  $z_{1/\delta}, w_{1/\delta} \in E$  tels que

$$|z_{1/\delta} - w_{1/\delta}| < \delta \text{ et } |f(z_{1/\delta}) - f(w_{1/\delta})| \geq \epsilon.$$

En choisissant successivement  $\delta = 1, 1/2, 1/3, \dots$  on pourrait trouver deux suites de points  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  tels que

$$|z_n - w_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(z_n) - f(w_n)| \geq \epsilon.$$

En extrayant si nécessaire des suites partielles, on obtiendrait deux suites  $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\{w_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers un même point  $\bar{z} \in E$  bien que

$$|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| \geq \epsilon,$$

en contradiction avec la continuité de  $f$  en  $\bar{z}$ . C.Q.F.D.

**Théorème 6** *L'image d'un ensemble compact par une fonction continue est un ensemble compact.*

Démonstration. Soient  $E \subseteq \mathbb{C}$  un ensemble compact et  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Si  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $f(E)$  et  $z_n \in E$  est un point tel que  $f(z_n) = w_n$ , la suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  admettra une suite partielle convergeant vers un point  $z \in E$ , donc la suite  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  admettra une suite partielle convergeant vers un point  $w = f(z) \in f(E)$ . C.Q.F.D.

Remarque. Il suit de ce théorème que sur un ensemble compact, le module, la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction continue atteignent une valeur minimum et une valeur maximum.

**Théorème 7** *L'image d'un domaine par une fonction continue est un ensemble connexe.*

Démonstration. Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. S'il existe deux ouverts  $O_1$  et  $O_2$  tels que

$$f(D) = f(D)O_1 + f(D)O_2$$

avec  $f(D)O_1 \neq \emptyset$  et  $f(D)O_2 \neq \emptyset$ , on aura

$$D = Df^{-1}(O_1) + Df^{-1}(O_2)$$

avec  $Df^{-1}(O_1) \neq \emptyset$  et  $Df^{-1}(O_2) \neq \emptyset$ . Puisque les ensembles  $f^{-1}(O_1)$  et  $f^{-1}(O_2)$  sont ouverts,  $D$  ne peut pas être connexe, en contradiction avec l'hypothèse. C.Q.F.D.

Remarque. L'image d'un domaine par une fonction continue n'est pas nécessairement un ensemble ouvert — il suffit de penser à une fonction constante.

Un ensemble  $E \subseteq \mathbb{C}$  est **connexe par arc** si deux quelconques de ses points,  $z_1$  et  $z_2$  peuvent être joints par une **courbe continue** entièrement contenue dans  $E$  : il existe une fonction continue  $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$  telle que  $\varphi(0) = z_1$  et  $\varphi(1) = z_2$ . Une telle courbe étant connexe, tout ensemble connexe par arc est connexe.

**Théorème 8** *Tout domaine est connexe par arc.*

Démonstration.

Soient  $D$  un domaine et  $z_1 \in D$  un quelconque de ses points. L'ensemble  $O_1$  des points de  $D$  qui peuvent être joints à  $z_1$  par une courbe continue est ouvert. L'ensemble  $O_2$  des points de  $D$  qui ne peuvent pas être joints à  $z_1$  par une courbe continue est aussi ouvert. Comme  $O_1$  n'est pas vide,  $O_2$  doit l'être. C.Q.F.D.

Remarque. La démonstration précédente montre en fait que deux points quelconques  $z_1$  et  $z_2$  d'un domaine  $D$  peuvent être joints par une **courbe linéaire par morceaux**, c'est-à-dire par une courbe continue  $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$  telle qu'il existe  $n \geq 0$  et

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = 1$$

tels que la restriction  $\varphi|_{[t_k, t_{k+1}]}$  de  $\varphi$  au sous-intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  est linéaire

$$\varphi(t) = a_k t + b_k.$$

Le domaine  $D$  est **convexe** si l'on peut prendre  $n = 0$  quels que soient  $z_1$  et  $z_2$ .

Même si l'on ne peut tracer le graphe d'une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  continue, on peut visualiser la fonction en traçant les images de familles de courbes appropriées sous la transformation  $w = f(z)$ .

Exemple. Considérons la transformation  $w = z^2$  ( $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ). On a

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad v = 2xy.$$

Les images inverses des courbes  $u = cste$  et  $v = cste$  sont les hyperboles

$$x^2 - y^2 = u \quad \text{et} \quad xy = \frac{v}{2}$$

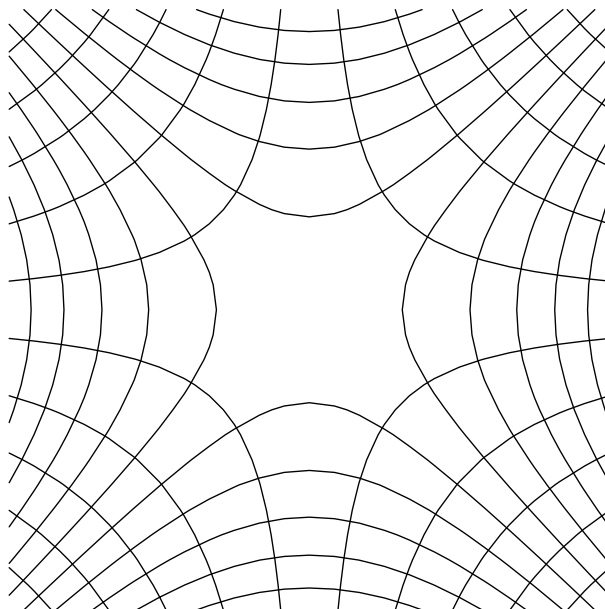


FIG. 2 –  $w = z^2$ , les hyperboles

respectivement. Alternativement, les images directes des courbes  $x = cste$  et  $y = cste$  sont les paraboles

$$u = x^2 - \frac{v^2}{4x^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{v^2}{4y^2} - y^2$$

respectivement.

### 3.2 Polynômes et fonctions rationnelles

**Théorème 9 (d’Alembert-Gauss)** *Quels que soient les nombres complexes  $a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$ , une équation polynomiale de degré  $n$ ,*

$$a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = 0,$$

*admet exactement  $n$  racines complexes.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu’elle en admet au moins une. Posons

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n.$$

Puisque

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |p(z)| = +\infty,$$

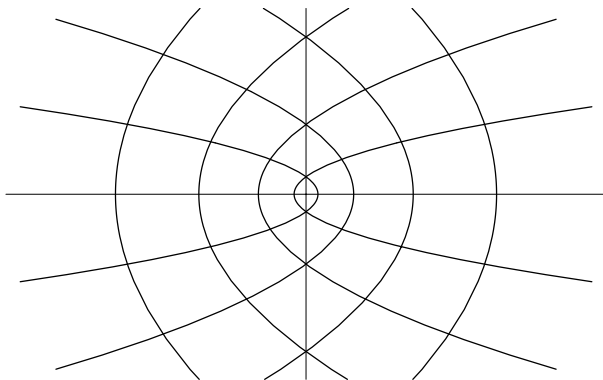


FIG. 3 –  $w = z^2$ , les paraboles

il existe  $z_0$  tel que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)| \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Montrons que  $p(z_0) = 0$ . Supposons le contraire. On a

$$p(z_0 + z) = p(z_0) + b_m z^m + q(z)$$

avec  $m \geq 1$ ,  $b_m \neq 0$  et

$$q(z) = b_{m+1} z^{m+1} + \dots + b_n z^n.$$

Soit  $\zeta (\neq 0)$  tel que

$$\zeta^m = -\frac{p(z_0)}{b_m}$$

et choisissons  $z = \rho \zeta$ ,  $0 < \rho \leq 1$ . Alors

$$p(z_0 + z) = p(z_0)(1 - \rho^m) + q(\rho \zeta)$$

donc

$$|p(z_0 + z)| \leq |p(z_0)|(1 - \rho^m) + A\rho^{m+1}$$

où  $A > 0$  est une constante indépendante de  $\rho$ , ce qui entraîne

$$|p(z_0 + z)| < |p(z_0)|$$

pour  $\rho > 0$  est assez petit, contredisant le choix de  $z_0$ . C.Q.F.D.

Le théorème précédent, souvent appelé **théorème fondamental de l'algèbre**, exprime que le corps des nombres complexes est **algébriquement**

**clos.** Dans son énoncé, les racines  $y$  sont bien entendu comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire que l'on a

$$a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = a_n(z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_k)^{n_k}$$

avec  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ . Lorsque les coefficients  $a_k$  sont réels, les racines de l'équation

$$a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = 0$$

qui ne sont pas réelles se présentent par paires de nombres complexes conjugués et la factorisation peut se mettre sous la forme

$$a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = a_n \prod_{j=1}^J (z - x_j)^{n_j} \prod_{k=1}^K (z^2 - 2x_kz + x_k^2 + y_k^2)^{m_k}$$

avec  $n_1 + \cdots + n_J + 2m_1 + \cdots + 2m_K = n$ . En particulier, lorsque  $n$  est impair, il y a au moins une racine réelle.

Soit

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \cdots + b_dz^d} = \frac{a_n(z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_k)^{n_k}}{b_d(z - \zeta_1)^{d_1}(z - \zeta_2)^{d_2} \cdots (z - \zeta_j)^{d_j}}$$

une fonction rationnelle dont le numérateur est un polynôme  $p_n$  de degré  $n$  et le dénominateur est un polynôme  $q_d$  de degré  $d$ , les deux polynômes étant sans facteur commun. On convient de considérer  $R$  comme une fonction de  $\overline{\mathbb{C}}$  vers  $\overline{\mathbb{C}}$  en posant

$$R(\zeta_m) = \infty, \quad 1 \leq m \leq j$$

et

$$R(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{si } n > d, \\ \frac{a_n}{b_d} & \text{si } n = d \\ 0 & \text{si } n < d. \end{cases}$$

Alors, quel que soit  $w \in \overline{\mathbb{C}}$ , l'équation

$$R(z) = w$$

admet exactement  $\sup\{n, d\}$  racines dans  $\overline{\mathbb{C}}$  (en tenant compte comme toujours des multiplicités). Les points où  $R = 0$  sont les **zéros** de  $R$ , ceux où  $R = \infty$  sont ses **pôles** et l'entier  $\sup\{n, d\}$  est le **degré** de  $R$ . La fonction  $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  applique donc le plan achevé sur lui-même  $\sup\{n, d\}$  fois et de façon continue.

Exemple. Lorsque  $\sup\{n, d\} = 1$ , il n'y a que trois possibilités.  
 $n = 1, d = 0 : \infty \rightarrow \infty$  car

$$R(z) = \frac{a_1 z + a_0}{b_0};$$

$n = 0, d = 1 : \infty \rightarrow 0$  et  $-b_0/b_1 \rightarrow \infty$  car

$$R(z) = \frac{a_0}{b_1 z + b_0};$$

$n = d = 1 : \infty \rightarrow a_1/b_1$  et  $-b_0/b_1 \rightarrow \infty$  car

$$R(z) = \frac{a_1 z + a_0}{b_1 z + b_0} \quad \text{où } a_1 b_0 - a_0 b_1 \neq 0.$$

### 3.3 La fonction exponentielle

Les fonctions  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\cosh z$  et  $\sinh z$  sont prolongées au plan complexe à l'aide de leur série de Taylor à l'origine. Par définition,

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ces fonctions sont donc liées par les relations

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh iz, \quad z \in \mathbb{C}$$



et

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{i} \sinh iz, \quad z \in \mathbb{C}.$$

On a ainsi

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}$$

et, en particulier, la formule d'Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

ce qui permet d'écrire un nombre complexe sous forme polaire comme

$$z = re^{i\theta} = |z|e^{i \arg z}.$$

**Théorème 10** *Quels que soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Démonstration. Quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ , on

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (z_1 + z_2)^k &= \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} \frac{1}{p!q!} z_1^p z_2^q = \sum_{p+q \leq n} \frac{1}{p!q!} z_1^p z_2^q \\ &= \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} z_1^p \sum_{q=0}^n \frac{1}{q!} z_2^q - \sum_{n < p+q, p, q \leq n} \frac{1}{p!q!} z_1^p z_2^q. \end{aligned}$$

Comme

$$\left| \sum_{n < p+q, p, q \leq n} \frac{1}{p!q!} z_1^p z_2^q \right| \leq \sum_{n < p+q, p, q \leq n} \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} |z_1|^p |z_2|^q \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{(|z_1| + |z_2|)^k}{k!},$$

le résultat suit en laissant  $n \rightarrow +\infty$  puisque, en vertu du critère de Cauchy, la dernière somme tend alors vers 0. C.Q.F.D.

On a donc

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

c'est-à-dire

$$\Re e^{x+iy} = e^x \cos y, \quad \Im e^{x+iy} = e^x \sin y \quad \text{et} \quad |e^{x+iy}| = e^x.$$

Les images directes des courbes  $x = cste$  et  $y = cste$  sous la transformation  $w = e^z$  sont des cercles centrés à l'origine et des rayons issus de l'origine respectivement. On remarque que l'on a encore  $e^z \neq 0$  quel que soit  $z \in \mathbb{C}$ .

Si  $a > 0$  et  $z \in \mathbb{C}$ , par définition,

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

Ce prolongement aux exposants complexes de la fonction  $x \mapsto e^x$  préserve les trois règles fondamentales des exposants : quels que soient  $a_1, a_2 > 0$  et  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,

- $(a_1 a_2)^z = a_1^z a_2^z$
- $a^{z_1 + z_2} = a^{z_1} a^{z_2}$
- $a^{z_1 z_2} = (a^{z_1})^{z_2}$ .

**Théorème 11** *On a*

$$e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

la convergence étant uniforme sur tout disque  $\overline{D}(0, R)$ .

Démonstration. En vertu du théorème du binôme, on a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}.$$

D'autre part, pour tout  $2 \leq k \leq n$ , on a, par récurrence sur  $k$ ,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1+2+\cdots+(k-1)}{n}.$$

On en tire

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &= \left| \sum_{k=2}^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) \frac{z^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=2}^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) \frac{R^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1+2+\cdots+(k-1)}{n} \frac{R^k}{k!} = \sum_{k=2}^n \frac{(k-1)k}{2n} \frac{R^k}{k!} = \frac{R^2}{2n} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{R^j}{j!} < \frac{R^2}{2n} e^R. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

### 3.4 Application aux séries de Fourier

Soit  $f : ] - \pi, \pi ] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et  $(a, b) \subseteq ] - \pi, \pi ]$ . Par définition

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \Re f(t) dt + i \int_a^b \Im f(t) dt.$$

Les propriétés de linéarité et d'additivité de l'intégrale réelle sont évidemment préservées par cette définition. De plus,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Posons en effet

$$\int_a^b f(t) dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right| e^{i\theta}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \int_a^b f(t) dt e^{-i\theta} = \int_a^b f(t) e^{-i\theta} dt \\ &= \int_a^b \Re (f(t) e^{-i\theta}) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

On a

$$\int_a^b e^{int} dt = \frac{e^{inb} - e^{ina}}{in}$$

et, en particulier,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Cette relation est la version complexe des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques  $\cos nt$  et  $\sin nt$ .

La série de Fourier de la fonction  $f$  peut s'écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikt}$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par les formules

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

et il s'agit d'étudier la convergence des sommes partielles

$$\sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt}$$

vers la fonction  $f$  — ces sommes seront réelles si et seulement si

$$\overline{c_k(f)} = c_{-k}(f)$$

c'est-à-dire si et seulement si  $f$  est réelle. Le calcul du noyau de Dirichlet et celui du noyau de Fejér sont particulièrement simples si l'on utilise les exponentielles complexes plutôt que les fonctions trigonométriques et l'identité de Parseval devient

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt.$$

### 3.5 Exercices

1. Montrer que la distance

$$d(E, F) = \inf\{|z - w| \mid z \in E, w \in F\},$$

entre un ensemble compact  $E$  et un ensemble fermé  $F$  disjoints est strictement positive.

2. Calculer  $u$  et  $v$  ( $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ) si

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Déterminer l'image du cercle unité par cette transformation.

3. Mêmes questions pour les transformations
  - $w = z^3$
  - $w = (2z - 1)/(2 - z)$
  - $w = (1 + z)/(1 - z)$ .
4. Trouver toutes les solutions de l'équation  $e^z = -a$  ( $a > 0$ ).
5. Trouver toutes les solutions de l'équation  $\cos z = w$  ( $-1 < w < 1$ ).
6. Trouver toutes les solutions de l'équation  $\sinh z = i$ .
7. Si  $ae^{is} + be^{it} = ce^{iu}$  ( $a, b, c > 0$ ), exprimer  $c$  et  $u$  en terme de  $a, s, b$  et  $t$ .

8. Déduire la formule

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

de la relation

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

9. On considère la transformation  $w = \cosh z$ . Vérifier que

$$u = \cosh x \cos y \quad \text{et} \quad v = \sinh x \sin y.$$

En déduire une description géométrique.

10. Montrer que

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}.$$

11. Soit

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z}, \quad \Re z > 1.$$

Vérifier que la série converge uniformément dans tout demi-plan  $\Re z \geq a > 1$ . En déduire que sa somme est une fonction continue dans le demi-plan  $\Re z > 1$ .

12.   partir de la formule d'Euler, obtenir les identités

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin(2n+1)t/2}{2 \sin t/2}$$

et

$$\sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n+1)t = \frac{\sin^2(n+1)t}{\sin t}.$$

13. Montrer qu'un polynôme trigonométrique de degré  $n$  admet au plus  $2n$  zéros dans tout intervalle semi-ouvert de longueur  $2\pi$  (tel  $]-\pi, \pi]$ ).

## 4 FONCTIONS HOLOMORPHES

La dérivation par rapport à une variable complexe est formellement identique à la dérivation par rapport à une variable réelle.

Soient  $E \subseteq \mathbb{C}$  un ensemble,  $z_0 \in E$  un de ses points et  $f : E \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. Les énoncés suivants sont alors équivalents :

1. Pour toute suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $E$  distincts de  $z_0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0 \text{ implique } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = L.$$

2. À chaque  $\epsilon > 0$  correspond  $\delta > 0$  tels que

$$z \in E \text{ et } 0 < |z - z_0| < \delta \text{ impliquent } |f(z) - L| < \epsilon.$$

Lorsqu'ils sont satisfaits, on écrit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $z_0 \in D$  un de ses points et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. On dit que  $f$  est dérivable en  $z_0$  si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On pose alors

$$f'(z) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

La fonction est dite **holomorphe** dans  $D$  si elle est dérivable en chaque point de  $D$ . Une fonction est dite holomorphe en un point si elle est holomorphe dans un disque ouvert centré en ce point. Les règles du calcul différentiel concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont bien entendu encore valables et une fonction dérivable en un point y est nécessairement continue.

**Théorème 12** *Soit*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad |z| < R.$$

Alors  $f$  est holomorphe dans le disque  $D(0, R)$  et

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}, \quad |z| < R.$$

Démonstration. Le rayon de convergence de la série dérivée est le même que celui de la série originelle. En particulier,

$$\phi(r) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)^2 |a_k| r^{k-2} < +\infty$$

pour tout  $r < R$ . Soient donc  $r < R$  et  $z, z_0 \in D(0, r)$ . Alors, en vertu de l'identité

$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \dots + B^{k-1})$$

on a que

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z_0^{k-1} &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left( \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0} - k z_0^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left( \sum_{p=0}^{k-1} z^{k-1-p} z_0^p - k z_0^{k-1} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left( \sum_{p=0}^{k-2} (z^{k-1-p} - z_0^{k-1-p}) z_0^p \right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left( \sum_{p=0}^{k-2} (z - z_0) \left( \sum_{q=0}^{k-2-p} z^{k-2-p-q} z_0^q \right) z_0^p \right) \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z_0^{k-1} \right| &\leq |z - z_0| \sum_{k=2}^{+\infty} |a_k| \left( \sum_{p=0}^{k-2} \left( \sum_{q=0}^{k-2-p} r^{k-2} \right) \right) \\ &\leq |z - z_0| \phi(r). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarque. On a en particulier

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

(formule de Taylor pour les coefficients d'une série entière).

Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $(x_0, y_0) \in D$  un de ses points et  $\phi : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. Les **dérivées partielles** de  $\phi$  en  $(x_0, y_0)$ , si elles existent, sont les quantités définies par les relations

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x + x_0, y_0) - \phi(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

et

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\phi(x_0, y + y_0) - \phi(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

On dérive la fonction par rapport à l'une des variables, l'autre étant fixée. Les règles du calcul différentiel s'appliquent donc aussi au calcul des dérivées partielles.

Une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point sans même y être continue, telle la fonction

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

qui est discontinue en  $(0, 0)$  bien qu'elle y possède des dérivées partielles nulles.

Cependant, si ses dérivées partielles sont continues dans  $D$ , la fonction est certainement continue dans  $D$  : en vertu du théorème des accroissements finis en effet, on peut trouver  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$  tels que

$$\begin{aligned} & \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y) \\ &= \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x + \Delta x, y) + \phi(x + \Delta x, y) - \phi(x, y) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial y}(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x + \theta_2 \Delta x, y) \Delta x \\ &\rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) 0 + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) 0 = 0 \end{aligned}$$

lorsque  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ .

**Théorème 13 (Cauchy-Riemann)** Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Alors ses parties réelles et imaginaires  $u$  et  $v$  admettent en tout point des dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$



Démonstration. Puisque  $f = u + iv$  est holomorphe, en tout point  $z_0 \in D$ , on a

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En choisissant  $z = z_0 + x$  ( $x$  réel), on obtient

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

et en choisissant  $z = z_0 + iy$  ( $y$  réel), on obtient

$$f'(z_0) = -i \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

c'est-à-dire

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

C.Q.F.D.

Observons réciproquement que si la partie réelle  $u$  et la partie imaginaire  $v$  d'une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  admettent des dérivées partielles continues qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

dans  $D$ , la fonction  $f$  est certainement holomorphe. En vertu du théorème des accroissements finis en effet, il existe  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in [0, 1]$  tels que

$$\begin{aligned} & \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ = & \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + i(v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y))}{\Delta x + i \Delta y} \\ = & \frac{u_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) \Delta y + u_x(x + \theta_2 \Delta x, y) \Delta x}{\Delta x + i \Delta y} \\ & + i \frac{u_x(x + \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) \Delta y - u_y(x + \theta_4 \Delta x, y) \Delta x}{\Delta x + i \Delta y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(u_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) - u_y(x + \Delta x, y + \theta_4 \Delta y)) \Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\
&\quad + \frac{u_x(x + \theta_2 \Delta x, y) \Delta x^2 + u_x(x + \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\
&+ i \frac{(-u_x(x + \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) + u_x(x + \Delta x, y + \theta_3 \Delta y)) \Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\
&\quad + \frac{-u_y(x + \theta_1 \Delta x, y) \Delta x^2 - u_y(x + \Delta x, y + \theta_4 \Delta y) \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\
&\qquad \qquad \qquad \rightarrow u_x(x, y) - i u_y(x, y)
\end{aligned}$$

lorsque  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ .

#### 4.1 Exercices

1. Le théorème des accroissements finis est-il valable pour les fonction holomorphes ?
2. La fonction de Bessel de première espèce d'indice 0 est définie par la relation

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{k!^2}.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série. Vérifier que  $J_0$  est une solution de l'équation différentielle

$$z^2 w'' + z w' + z^2 w = 0.$$

3. Vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions suivantes :
  - $w = z^3$
  - $w = (z + 1/z)/2$
  - $w = \sin z$ .
4. Déterminer les conditions sur les constantes réelles  $a, b, c$  et  $d$  qui rendent la fonction  $f(z) = ax + by + i(cx + dy)$  holomorphe.
5. Un polygone régulier est inscrit dans le cercle unité et l'un de ses sommets est relié aux  $n - 1$  autres par des diagonales. Montrer que le produit des longueurs de ces diagonales est  $n$ .
6. Montrer que les zéros de la dérivée d'un polynôme sont situés dans l'enveloppe convexe des zéros du polynôme (l'ensemble des combinaisons linéaires convexes de ces zéros)(théorème de Gauss-Lucas).

## 5 LE CALCUL INTÉGRAL

Le calcul intégral des fonctions complexes est au coeur de leur théorie.

### 5.1 Propriétés des courbes

Une **courbe différentiable**  $\mathcal{C}$  est définie par une fonction  $t \mapsto z(t)$  d'un intervalle  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  admettant une dérivée  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$  continue et non nulle :

$$\mathcal{C} = \{z \mid z = z(t), a \leq t \leq b\}.$$

On suppose de plus que  $z(t_1) \neq z(t_2)$  si  $a < t_1 < t_2 < b$  (courbe de Jordan) et lorsque  $z(a) = z(b)$ , on dit que la courbe est fermée. Une courbe fermée partage le plan en deux domaines disjoints, un domaine borné, l'**intérieur** de  $\mathcal{C}$  et un domaine non borné, son **extérieur**. La démonstration rigoureuse de ce fait « évident » est trop compliquée pour être présentée dans ce cours (théorème de Jordan) — consulter [3], page 267, à ce propos. Nous supposons enfin que la courbe ne coupe une droite quelconque qu'en un nombre fini de points (éventuellement à une exception près — les segments sont des courbes admissibles!).

Exemple. Le cercle unité est une courbe fermée qui peut être paramétrée par

$$z = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Son intérieur est le disque  $D(0, 1)$ .

Toute fonction  $s \mapsto t$  d'un intervalle  $[c, d]$  sur  $[a, b]$  admettant une dérivée continue et telle que  $t'(s) > 0$  constitue un **reparamétrage admissible** :

$$\mathcal{C} = \{z \mid z = z(t(s)) = z_1(s), c \leq s \leq d, t'(s) > 0\}.$$

Lorsque  $t'(s) < 0$ , on obtient une courbe dénotée par  $-\mathcal{C}$  :

$$-\mathcal{C} = \{z \mid z = z(t(s)) = z_1(s), c \leq s \leq d, t'(s) < 0\}.$$

Exemples. Le cercle unité peut aussi être paramétré par

$$z = e^{i2\pi s}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Il est alors parcouru à la vitesse  $|z_1'(s)| = 2\pi|z'(t)|$ . Si

$$\mathcal{C} = [z_1, z_2] = \{z \mid z = (1-t)z_1 + tz_2, 0 \leq t \leq 1\},$$

alors

$$-\mathcal{C} = [z_2, z_1] = \{z \mid z = sz_1 + (1-s)z_2, 0 \leq s \leq 1\}$$

— ici  $[c, d] = [a, b] = [0, 1]$  et  $t = 1 - s$ .

Un paramétrage d'une courbe  $\gamma$  induit un **sens de parcours**. La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $z_0 = z(t_0)$  est

$$T = \{z \mid z = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0), t \in \mathbb{R}\}$$

et sa normale est

$$N = \{z \mid z = z(t_0) + i z'(t_0)(t - t_0), t \in \mathbb{R}\}.$$

Les « vecteurs »  $z'(t_0)$  et  $i z'(t_0)$  sont toujours orthogonaux et orientés comme les « vecteurs » 1 et  $i$ . Une courbe fermée est dite parcourue **dans le sens positif** si le vecteur  $i z'(t)$  pointe vers son intérieur. Cela signifie qu'au voisinage de chaque point  $z_0$  (dans un disque  $D(z_0, r)$  assez petit), l'intérieur de  $\mathcal{C}$  et le vecteur  $i z'(t_0)$  sont situés dans le même des deux demi-plans déterminés par la tangente en  $z_0$ . Un reparamétrage admissible —  $z'_1(s) = z'(t)t'(s)$  avec  $t'(s) > 0$  — préserve, bien entendu, le sens de parcours.

Exemple. Considérons le paramétrage

$$z = a \cos t + i b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On a

$$z'(t) = -a \sin t + i b \cos t$$

et

$$i z'(t) = -b \cos t - i a \sin t.$$

L'équation de la tangente en  $z_0$  est

$$(x - a \cos t_0)b \cos t_0 + (y - b \sin t_0)a \sin t_0 = 0$$

et son intérieur est situé dans le demi-plan

$$\begin{aligned} & (x - a \cos t_0)b \cos t_0 + (y - b \sin t_0)a \sin t_0 \\ &= -(t - t_0)b^2 \cos^2 t_0 - (t - t_0)a^2 \sin^2 t_0 \leq 0. \end{aligned}$$

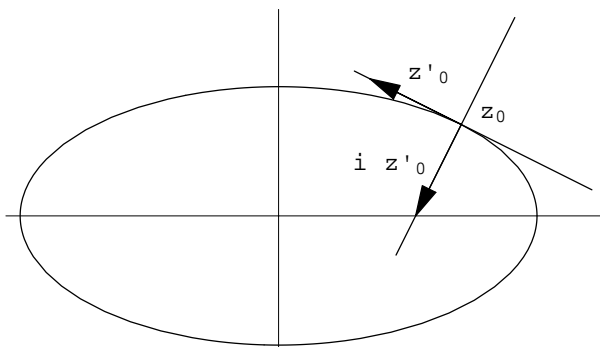


FIG. 4 – Le sens de parcours positif

Elle est donc parcourue dans le sens positif sous ce paramétrage.

La **longueur** de la courbe  $\mathcal{C}$  est

$$L_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} |dz| = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

Comme il se doit, elle ne dépend pas du paramétrage retenu :

$$\int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b |z'_1(s)| |s'(t)| dt = \int_c^d |z'_1(s)| ds.$$

Remarque. En coordonnées cartésiennes,

$$|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

alors qu'en coordonnées polaires,

$$|dz| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Une **courbe différentiable par morceaux** ou un **chemin** est obtenu en recollant un nombre fini de courbes différentiables  $\mathcal{C}_k$  dont l'extrémité  $z_k(b_k)$  de l'une coïncide avec l'origine de la suivante  $z_{k+1}(a_{k+1})$ .

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 = \{z \mid z = z_1(t) \text{ ou } z = z_2(t), z_1(b_1) = z_2(a_2)\}.$$

Il est toujours possible (mais rarement nécessaire) de reparamétriser l'ensemble des courbes au moyen d'un seul intervalle  $[a, b]$ .

Exemple. Soient

$$\mathcal{C}_1 = [0, 1] = \{z \mid z = t, 0 \leq t \leq 1\},$$

$$\mathcal{C}_2 = [1, 1 + i] = \{z \mid z = 1 + it, 0 \leq t \leq 1\},$$

$$\mathcal{C}_3 = [1 + i, i] = \{z \mid z = (1 - t) + i, 0 \leq t \leq 1\}$$

et

$$\mathcal{C}_4 = [i, 0] = \{z \mid z = i(1 - t), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Alors  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4$  est le bord du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  parcouru dans le sens positif et peut être reparamétrisé par

$$z(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1 + i(t - 1) & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ (3 - t) + i & \text{si } 2 \leq t < 3, \\ i(4 - t) & \text{si } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

## 5.2 Intégrales curvilignes

Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et  $\mathcal{C}$  une courbe différentiable contenue dans  $D$ , paramétrée par  $z = z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Par définition,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

Si  $z = z(t(s)) = z_1(s)$ ,  $c \leq s \leq d$ ,  $t'(s) > 0$  est un autre paramétrage admissible, on a bien sûr que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_c^d f(z_1(s))z_1'(s) ds.$$

Si, au contraire,  $z = z(t(s)) = z_1(s)$ ,  $c \leq s \leq d$ ,  $t'(s) < 0$ , on a

$$\int_{-\mathcal{C}} f(z) dz = - \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

L'intégrale curviligne de  $f$  le long d'un chemin  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$  est définie par

$$\int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz.$$

L'intégrale curviligne jouit donc des propriétés fondamentales de linéarité :

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)) dz = \alpha_1 \int_{\mathcal{C}} f_1(z) dz + \alpha_2 \int_{\mathcal{C}} f_2(z) dz,$$

d'additivité

$$\int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz$$

et satisfait l'inégalité

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)| |dz| \leq \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathcal{C}\} L_{\mathcal{C}}.$$

Considérons le cas d'une fonction  $f$  admettant une primitive  $F$  holomorphe dans  $D$ . Pour tout chemin  $\mathcal{C}$  d'origine  $z_1$  et d'extrémité  $z_2$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt = F(z(t)) \Big|_a^b = F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

Il est donc raisonnable d'écrire

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

dans ce cas. En particulier, pour tout chemin fermé  $\mathcal{C}$ ,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0.$$

Exemple. Pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}.$$

Exemple. Soient

$$\mathcal{C}_1 = \{z \mid z = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$$

et

$$\mathcal{C}_2 = \{z \mid z = e^{-it}, 0 \leq t \leq \pi\}.$$

Alors

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi i dt = i\pi$$

et

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi -i dt = -i\pi.$$

La courbe  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$  est le cercle unité parcouru dans le sens positif et l'on a

$$\int_{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

La fonction holomorphe  $1/z$  n'admet donc pas de primitive holomorphe dans le plan privé de l'origine.

### 5.3 Les théorèmes de Cauchy

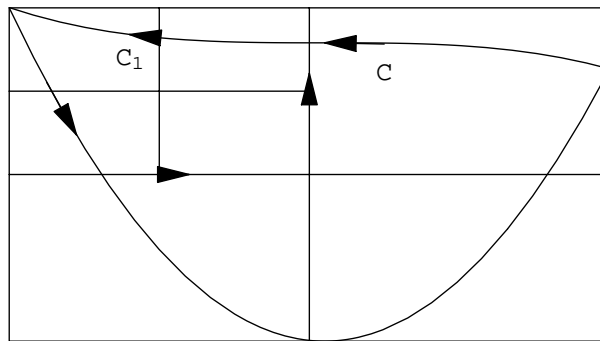


FIG. 5 – Le théorème de Cauchy

**Théorème 14 (Cauchy)** Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $\mathcal{C}$  un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ . Alors

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0.$$

Démonstration. Inscrivons le chemin  $\mathcal{C}$  dans un rectangle de côtés (parallèles aux axes)  $a$  et  $b$  (figure 5, page 39), supposons  $\mathcal{C}$  parcouru dans le sens positif et posons

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| = I.$$



Comme

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\mathcal{C}\mathcal{R}_k} f(z) dz$$

où  $\mathcal{C}\mathcal{R}_k$  est un chemin constitué de portions de  $\mathcal{C}$  et de portions du bord d'un rectangle de côtés (parallèles aux axes)  $a/2$  et  $b/2$  parcouru dans le sens positif, il existe un chemin  $\mathcal{C}_1$  inscrit dans un rectangle de côtés  $a/2$  et  $b/2$  tel que

$$\left| \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz \right| \geq \frac{I}{4}.$$

En répétant ce raisonnement, on voit qu'il existe un chemin  $\mathcal{C}_2$  inscrit dans un rectangle de côtés (parallèles aux axes)  $a/4$  et  $b/4$  tel que

$$\left| \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz \right| \geq \frac{I}{16}.$$

Ainsi de suite. On obtient de cette façon une suite de sous-rectangles emboîtés de côtés  $a/2^n$  et  $b/2^n$  contenant un chemin  $\mathcal{C}_n$  tel que

$$\left| \int_{\mathcal{C}_n} f(z) dz \right| \geq \frac{I}{4^n}.$$

L'intersection de tous ces sous-rectangles se réduit à un point  $z_0$  où  $f$  est holomorphe. On a donc au voisinage de ce point

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)$$

avec

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0.$$

Donné  $\epsilon > 0$  arbitraire, on peut choisir  $r > 0$  tel que

$$z \in D(z_0, r) \text{ entraîne } |r(z)| < \epsilon |z - z_0|.$$

Alors, pour tout  $n$  suffisamment grand, le  $n^{\text{ième}}$  sous-rectangle est contenu dans  $D(z_0, r)$  et l'on a

$$\int_{\mathcal{C}_n} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_n} r(z) dz.$$

On en tire

$$\frac{I}{4^n} \leq \epsilon \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4^n}} L_{\mathcal{C}_n} = \frac{\epsilon \sqrt{a^2 + b^2} 2(a + b)}{4^n}$$

donc

$$I \leq \epsilon \sqrt{a^2 + b^2} 2(a + b)$$

ce qui montre que  $I = 0$ . C.Q.F.D.

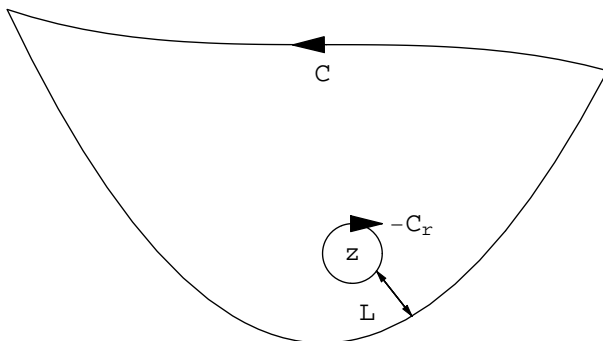


FIG. 6 – La formule de Cauchy

**Théorème 15 (Cauchy)** Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $\mathcal{C}$  un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ . Alors, pour tout  $z$  dans l'intérieur de  $\mathcal{C}$ ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

le chemin  $\mathcal{C}$  étant parcouru dans le sens positif.

Démonstration. La fonction

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

étant holomorphe dans le domaine  $D \setminus \{z\}$ , le théorème de Cauchy implique (figure 6, page 41)

$$0 = \int_{\mathcal{C}} g(\zeta) d\zeta + \int_{\mathcal{L}} g(\zeta) d\zeta - \int_{C_r} g(\zeta) d\zeta - \int_{\mathcal{L}} g(\zeta) d\zeta$$

où

$$C_r = \{\zeta \mid \zeta = z + re^{it}, -\pi \leq t \leq \pi\}$$

de telle sorte que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

Le premier membre de la double équation précédente est indépendant de  $r$  et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + re^{it}) dt = f(z).$$

C.Q.F.D.

**Théorème 16 (Cauchy)** Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Alors sa dérivée  $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe. De plus, si  $\mathcal{C}$  un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ , pour tout  $z$  dans l'intérieur de  $\mathcal{C}$ ,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

le chemin  $\mathcal{C}$  étant parcouru dans le sens positif.

Démonstration. Soient  $z \in D$ ,  $r > 0$  tel que  $D(z, 3r) \subseteq D$  et  $|h| < r$ . Alors

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta$$

ce qui montre que, laissant  $h \rightarrow 0$ ,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

La démonstration de la relation

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

se fait comme dans le théorème précédent. C.Q.F.D.

Remarque. Par récurrence sur  $n$ , on voit par un raisonnement semblable que l'on a pour la  $n^{\text{ième}}$  dérivée  $f^{(n)}$  et sous les mêmes hypothèses, la relation

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Un domaine  $D$  est **simplement connexe** s'il possède la propriété suivante : si  $\mathcal{C}$  est un chemin fermé contenu dans  $D$ , son intérieur est aussi contenu dans  $D$ .

Exemples. Un domaine convexe est simplement connexe. Le plan privé d'un rayon

$$R_\theta = \{z = re^{i\theta} \mid r \geq 0\}$$

est simplement connexe. Le plan privé de l'origine n'est pas simplement connexe.

**Théorème 17** Une fonction  $f$  holomorphe dans un domaine simplement connexe  $D$  y admet une primitive holomorphe  $F$  :

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$

où  $z_0 \in D$  et  $F(z_0)$  sont arbitraires.

Démonstration. Puisque l'intégrale ne dépend pas du chemin joignant  $z_0$  à  $z$ , la fonction  $F$  est bien définie. Pour vérifier qu'elle est holomorphe et que sa dérivée au point  $z$  est  $f(z)$ , soit  $r > 0$  tel que  $D(z, r) \subseteq D$  et, si  $|h| < r$ , intégrons du point  $z$  au point  $z + h$  le long du segment  $[z, z + h]$ . On aura

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \\ &\leq \sup\{|f(\zeta) - f(z)| \mid \zeta \in [z, z+h]\} \end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 avec  $|h|$ . C.Q.F.D.

Exemple. La fonction arctan peut être prolongée à une fonction holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus (]-i\infty, -i] \cup [i, +i\infty[)$  en posant

$$\arctan z = \int_0^z \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \arctan(1+i) &= \int_0^1 \frac{(1+i) dt}{1 + (1+i)^2 t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1+2t^2}{1+4t^4} dt + i \int_0^1 \frac{1-2t^2}{1+4t^4} dt = 1,017 + i0,402. \end{aligned}$$

## 5.4 Le logarithme

La fonction  $1/z$  étant holomorphe dans le domaine simplement connexe  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ , elle y admet une primitive holomorphe dénotée  $\ln z$  et définie par

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

En intégrant le long du chemin  $[1, |z|]$  suivi d'un arc du cercle de rayon  $|z|$  centré à l'origine, on obtient

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0].$$

(Par continuité, on utilise encore cette relation pour calculer le logarithme naturel d'un nombre réel strictement négatif mais la fonction  $z \mapsto \ln z$  n'est holomorphe que dans  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ .)

Exemples. On a

$$\ln 1 = 0, \quad \ln i = i \frac{\pi}{2}, \quad \ln(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}, \quad \ln(-1) = i\pi.$$

Observons que l'on a

$$e^{\ln z} = z \quad \text{mais seulement} \quad \ln(e^z) = z \pmod{2\pi i}.$$

Semblablement,

$$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2 \pmod{2\pi i}.$$

Si  $p \in \mathbb{C}$  et  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$$z^p = e^{p \ln z}$$

(mais la fonction  $z \mapsto z^p$  n'est holomorphe que dans  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ ).

Exemple. On a

$$2^i = e^{i \ln 2}, \quad i^i = e^{-\pi/2} \quad \text{et} \quad (-1)^i = e^{-\pi}.$$

On peut définir une fonction  $\log z$  holomorphe dans tout domaine simplement connexe  $D$  ne contenant pas l'origine en posant

$$\log z = \log z_0 + \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

et en choisissant  $z_0 \in D$  et  $\log z_0$  tels que

$$e^{\log z_0} = z_0.$$

(On dit alors que l'on a choisi une **détermination** du logarithme dans  $D$ .)

Exemple. Pour obtenir un logarithme dans un domaine contenant l'axe réel négatif, on peut prendre  $D = \mathbb{C} \setminus R_{\pi/4}$  et poser

$$\log z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \begin{cases} \ln |z| + i \arg z & \text{si } -\pi < \arg z \leq \pi/4 \\ \ln |z| + i(\arg z - 2\pi) & \text{si } \pi/4 < \arg z \leq \pi. \end{cases}$$

Plus généralement, on peut définir le logarithme  $\log f(z)$  d'une fonction  $f$  comme fonction holomorphe de  $z$  dans tout domaine simplement connexe  $D$  où  $f$  est holomorphe et ne s'annule pas en posant

$$\log f(z) = \log f(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

et en choisissant  $z_0 \in D$  et  $\log f(z_0)$  tels que

$$e^{\log f(z_0)} = f(z_0).$$

Exemple. Dans le domaine  $\mathbb{C} \setminus (]-i\infty, -i] \cup [i, +i\infty[)$ ,

$$\log(1 + z^2) = \int_0^z \frac{2\zeta}{1 + \zeta^2} d\zeta,$$

$$\sqrt{1 + z^2} = e^{\frac{1}{2} \log(1+z^2)}$$

et

$$\operatorname{arcsinh} z = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}} = \log(z + \sqrt{1 + z^2}).$$

Ainsi

$$\log(1 + (1 + i)^2) = \int_0^1 \frac{2(1 + i)t}{1 + (1 + i)^2 t^2} (1 + i) dt = 0,805 + i 1,107,$$

$$\sqrt{1 + (1 + i)^2} = 1,272 + i 0,786$$

et

$$\operatorname{arcsinh}(1 + i) = \log(1 + i + 1,272 + i 0,786) = 1,061 + i 0,666.$$

## 5.5 Exercices

1. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe paramétrée par  $z = z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  et de longueur  $L_{\mathcal{C}}$ . Montrer que la longueur d'arc  $s$ , définie par

$$s = \int_a^t |z'(\tau)| d\tau,$$

est un nouveau paramètre admissible relativement auquel la courbe est parcourue à vitesse constante. Faire les calculs explicites pour chacune des trois courbes suivantes :

- le segment  $[0, 1]$ ;
  - le cercle unité parcouru dans le sens positif;
  - la parabole d'équation  $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ .
2. Calculer, pour chaque courbe  $\mathcal{C}$  de l'exercice précédent

$$\int_{\mathcal{C}} z dz, \int_{\mathcal{C}} \Re z dz, \int_{\mathcal{C}} |z| dz, \int_{\mathcal{C}} \arg z dz.$$

3. Soient  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue réelle telle que  $|f(z)| \leq 1$  et  $\mathcal{C}$  le cercle unité parcouru dans le sens positif. Montrer que

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq 4.$$

4. Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine convexe et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que  $|f'(z)| \leq M$  dans  $D$ . Montrer que

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq M |z_2 - z_1| \text{ pour tout } z_1, z_2 \in D.$$

5.  $\mathcal{C}$  désignant le cercle unité parcouru dans le sens positif, calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \left( z + \frac{1}{z} \right)^{2n} \frac{dz}{z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n} t dt \text{ et } \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2n} t dt.$$

Obtenir aussi

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n+1} t dt \text{ et } \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2n+1} t dt.$$

6.  $\mathcal{C}$  désignant le cercle unité parcouru dans le sens positif, calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}.$$

7. Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $\mathcal{C}$  un chemin fermé parcouru dans le sens positif et contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ . Soient enfin  $z_1$  et  $z_2$  deux points à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ . Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Qu'obtient-on lorsque  $z_1 \rightarrow z_2$  ?

8.  $\mathcal{C}$  désignant le cercle unité parcouru dans le sens positif, calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin^6 z}{(z - \pi/6)^2} dz.$$

9. Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $\mathcal{C}$  un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ . Soit  $z_0$  un point à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ . Montrer que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{C}} \frac{f^{(n)}(z)}{(z - z_0)} dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

10. Soient  $\varphi : \{z \mid |z| = 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et  $\mathcal{C}$  le cercle unité parcouru dans le sens positif. Montrer que

$$\overline{\int_{\mathcal{C}} \varphi(z) dz} = - \int_{\mathcal{C}} \overline{\varphi(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine contenant  $\overline{D}(0, 1)$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Calculer

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0} dz, \quad |z_0| \neq 1.$$

11. Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Supposons que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

pour toute chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ . Montrer que  $f$  est holomorphe dans  $D$  (théorème de Morera).

12. Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions holomorphes convergeant uniformément sur toute partie compacte  $E \subseteq D$  vers une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Montrer que  $f$  est holomorphe. En déduire que la fonction

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z}$$

est holomorphe dans le demi-plan  $\Re z > 1$ .

13. Calculer  $\sqrt{2}^i$  et  $i^{\sqrt{2}}$ .  
 14. Trouver l'erreur :  $-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ .  
 15. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z^z$ .



16. Montrer que l'on peut déterminer une fonction

$$\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

holomorphe dans le disque  $D(0, 1)$ . Calculer au point  $i/2$  la valeur de celle des deux déterminations possibles de la fonction qui est positive lorsque son argument l'est.

17. Déterminer un domaine où l'on puisse définir  $\log \arctan z$  comme fonction holomorphe.

## 6 PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DES FONCTIONS HOLOMORPHES

Bien que formellement identiques, la dérivation par rapport à une variable complexe et la dérivation par rapport à une variable réelle entraînent des conséquences bien différentes pour les fonctions impliquées.

### 6.1 L'analycité

**Théorème 18 (Taylor)** *Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine contenant le disque  $\overline{D}(z_0, r)$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Alors*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r$$

où

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

$C_r$  désignant le cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $r$  parcouru dans le sens positif.

Démonstration. Soit  $z \in D(z_0, r)$ . En vertu de la formule de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\zeta) \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z_0 + r e^{it}) \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{r} \right)^k e^{-ikt} dt. \end{aligned}$$

Cette dernière série, étant uniformément convergente, peut être intégrée terme à terme ce qui donne

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

avec

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

L'expression

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

suit de l'expression générale de Taylor pour les coefficients d'une série entière ou de la formule intégrale de Cauchy pour la  $k^{\text{ième}}$  dérivée d'une fonction holomorphe. C.Q.F.D.

Exemples. On peut choisir une détermination holomorphe des fonctions  $z \mapsto \log(1+z)$  et  $z \mapsto (1+z)^p$  dans  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, -1]$ . Pour les déterminations qui sont réelles sur l'axe réel, on a

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k, \quad |z| < 1$$

et

$$(1+z)^p = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} z^k, \quad |z| < 1.$$

De plus, en intégrant terme à terme la série pour  $(1+z^2)^{-1}$ , on obtient

$$\arctan z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}, \quad |z| < 1.$$

De façon générale, on dit d'une fonction  $\phi$  qu'elle est **analytique** si elle peut localement s'exprimer comme la somme d'une série entière de son argument (ou de ses arguments). Il peut s'agir d'une fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , d'une fonction  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , d'une fonction  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  etc ... Toute fonction holomorphe dans un domaine  $\gamma$  est donc analytique. Une fonction holomorphe dans le plan tout entier est dite **entière**. Une telle fonction peut s'écrire comme la somme d'une série entière en  $z$  convergeant pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

**Théorème 19 (Liouville)** *Une fonction entière et bornée est nécessairement une constante.*

Démonstration. Soit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

On a les **inégalités de Cauchy** pour les coefficients de la série :

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \sup\{|f(z)| \mid |z| = r\}.$$

Puisqu'ici  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z$ , en laissant  $r \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$a_k = 0 \text{ si } k \geq 1.$$

C.Q.F.D.

Exemple. On a

$$|\cos x| \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

mais

$$\sup\{|\cos z| \mid |z| = r\} = \cosh r \rightarrow +\infty \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty.$$

## 6.2 La propriété des zéros isolés

Soit  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. La fonction admet un zéro **d'ordre** ou de **multiplicité**  $m \geq 1$  en  $z_0 \in D$  si son développement de Taylor y est de la forme

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ avec } a_m \neq 0.$$

**Théorème 20** *Les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés.*

Démonstration. L'énoncé signifie qu'à chaque zéro  $z_0$  de  $f$  dans  $D$  correspond  $\rho > 0$  tel que

$$0 < |z - z_0| < \rho \text{ entraîne } f(z) \neq 0.$$

On a en effet

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m g(z)$$

où

$$g(z) = a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho.$$

Puisque la fonction  $g$  est continue et ne s'annule pas en  $z_0$ , elle ne s'annule pas dans un voisinage  $D(z_0, \rho)$  de  $z_0$ . C.Q.F.D.

Le **principe du prolongement analytique** exprime que deux fonctions holomorphes dans un même domaine  $D$  qui coïncident sur un ensemble

de points admettant un point d'accumulation dans  $D$  doivent coïncider partout dans  $D$ . Par exemple deux fonctions entières coïncidant sur l'axe réel coïncident partout.

**Théorème 21** Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine symétrique par rapport à l'axe réel et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe, réelle sur l'axe réel. Alors

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

Démonstration. La fonction  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  est holomorphe dans  $D$  :

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}}{\bar{z} - \bar{z}_0} \rightarrow \overline{f'(\bar{z}_0)}$$

lorsque  $z \rightarrow z_0$ . Comme elle coïncide avec  $f$  sur l'axe réel, elle coïncide avec  $f$  partout dans  $D$ . C.Q.F.D.

### 6.3 La propriété du module maximum

**Théorème 22** Soit  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe, non constante. Alors le module  $|f|$  de  $f$  n'a pas de maximum local dans  $D$  ni de minimum local sauf aux points où  $f$  s'annule.

Démonstration. Soient  $z_0 \in D$ ,  $D(z_0, 2r) \subseteq D$ . On a

$$|f(z_0 + re^{it})|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_k \bar{a}_j r^{k+j} e^{i(k-j)t}.$$

En intégrant terme à terme les séries, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Si  $|f|$  admettait un maximum local en  $z_0$ , on aurait

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq |a_0|^2$$

pour tout  $r$  assez petit et la fonction serait constamment égale à  $a_0$  dans un voisinage de  $z_0$  donc dans  $D$  tout entier. Le cas d'un minimum se déduit de

celui d'un maximum local en considérant la fonction  $1/f$  sur le domaine  $D$  amputé des points où  $f$  s'annule. C.Q.F.D.

Exemple. Sur un ensemble compact  $E$ , une fonction holomorphe (dans un domaine  $D \supset E$ ) non constante atteint toujours son module maximum sur le bord de  $E$ , jamais dans son intérieur.

**Théorème 23 (Schwarz)** *Soit  $f$  une fonction holomorphe dans le disque unité, telle que  $|f(z)| \leq 1$  et s'annulant à l'origine. Alors*

$$|f(z)| \leq |z|, \quad |z| < 1$$

avec égalité en un point  $z \neq 0$  si et seulement si  $f(z) = cz$ ,  $|c| = 1$ .

Démonstration. Soit  $0 < r < 1$  arbitraire. Si

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k, \quad |z| < 1,$$

soit

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^{k-1}, \quad |z| < 1.$$

L'inégalité

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

ayant lieu sur le cercle  $|z| = r$ , elle a lieu dans le disque  $D(0, r)$ . Le résultat suit en laissant  $r \rightarrow 1$ . Et l'on n'aura égalité que si  $g$  est constante. C.Q.F.D.

## 6.4 Exercices

1. Soient  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$  des séries entières dont les rayons de convergence sont plus grands que ou égaux à  $r$ . Montrer que le rayon de convergence de la série produit,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} z^k,$$

est encore plus grand que ou égal à  $r$ .

2. Calculer explicitement les trois premiers termes de la série de Taylor à l'origine de la fonction

$$f(z) = e^{z/(1-z)}.$$

Quel est le rayon de convergence ?

3. Soit

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{1}{2!} B_2 z^2 + \frac{1}{3!} B_3 z^3 + \dots$$

Quel est le rayon de convergence de la série ? Calculer explicitement les trois premiers nombres de Bernoulli,  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$ .

4. Soient  $0 < a < b$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  quelconque (mais différent de  $a$  et  $b$ ) et

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}.$$

Développer la fonction  $f$  suivant les puissances entières de  $z - z_0$ . Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

5. Soit  $f$  une fonction entière satisfaisant une inégalité du type

$$|f(z)| \leq M |z|^n, \quad M > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que  $f$  est un polynôme.

6. Soit  $f$  une fonction entière telle qu'il existe trois nombres réels non tous nuls,  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$a\Re f(z) + b\Im f(z) \leq c, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que  $f$  est constante.

7. Dédire le théorème fondamental de l'algèbre du théorème de Liouville sur les fonctions entières bornées.
8. Déterminer l'ordre de tous les zéros des fonctions suivantes :
- $1 - \cos z$  ;
  - $z \sin z$  ;
  - $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$ .

9. Déterminer toutes les fonctions entières telles que  $|f(z)| = 1$  si  $|z| = 1$ .

10. Montrer que

$$\sup_{|z| \leq 1} \left| \frac{\sin z}{z} \right| \leq \sinh 1.$$

11. Un polygone régulier est inscrit dans le cercle unité et un point du disque unité est joint à ses sommets par des droites. Déterminer un point pour lequel le produit des longueurs de ces droites est maximum et la valeur du produit maximum.

## 7 LE CALCUL DES RÉSIDUS

L'étude des fonctions holomorphes aux points où elles cessent de l'être nous permet de leur découvrir de nouvelles propriétés.

### 7.1 Singularités isolées

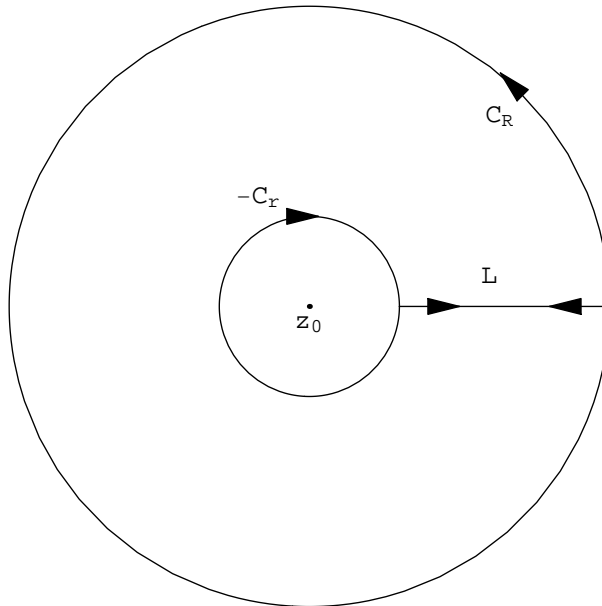


FIG. 7 – Le théorème de Laurent

**Théorème 24 (Laurent)** Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine contenant la couronne  $\{z \mid r \leq |z - z_0| \leq R\}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Alors

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad r < |z - z_0| < R$$

où

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

$C_\rho$  désignant le cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $\rho$  ( $r \leq \rho \leq R$ ) parcouru dans le sens positif.



Démonstration. Soit  $r < |z - z_0| < R$ . En vertu de la formule de Cauchy (figure 7, page 55), on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R+\mathcal{L}}-C_{r-\mathcal{L}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\zeta) \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\zeta) \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k \frac{d\zeta}{z - z_0}. \end{aligned}$$

En intégrant les séries terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta (z - z_0)^k \\ &+ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\zeta) (\zeta - z_0)^k d\zeta \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta (z - z_0)^k \\ &+ \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta (z - z_0)^j. \end{aligned}$$

Finalement, la fonction

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

étant holomorphe dans la couronne  $r < |\zeta - z_0| < R$ , on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

C.Q.F.D.

Remarque. Si  $f$  est holomorphe dans une couronne centrée à l'origine contenant le cercle unité, la restriction de la série de Laurent de  $f$  au cercle unité est la série de Fourier de la restriction de la fonction  $f$  au cercle unité :

$$f(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{ik\tau}) e^{-ik\tau} d\tau e^{ikt}.$$

Exemple. Soient  $0 < a < b$  et

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}.$$

Dans le disque  $|z| < a$ , le développement de Taylor de  $f$  est

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a} \frac{1}{1-z/a} - \frac{1}{b} \frac{1}{1-z/b} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a^{k+1}} - \frac{1}{b^{k+1}} \right) z^k. \end{aligned}$$

Dans la couronne  $a < |z| < b$ , le développement de Laurent de  $f$  est

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) = \frac{1}{b-a} \left( -\frac{1}{z} \frac{1}{1-a/z} - \frac{1}{b} \frac{1}{1-z/b} \right) \\ &= \frac{-1}{b-a} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{b^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

À l'extérieur du disque  $|z| < b$  enfin, le développement de Laurent de  $f$  est

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{b^k - a^k}{b-a} \right) \frac{1}{z^{k+1}}.$$

Un point  $z_0$  est une **singularité isolée** pour une fonction  $f$  si elle est holomorphe dans un disque pointé  $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$  centré en  $z_0$ . Suivant la nature du développement de Laurent en  $z_0$ , on distingue trois cas.

- Une singularité isolée est **apparente** si le développement de Laurent ne contient aucun terme  $(z - z_0)^k$  avec  $k < 0$ .
- Une singularité isolée est un **pôle d'ordre  $m$**  si

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_m \neq 0.$$

- Une singularité isolée est **essentielle** si le développement de Laurent contient un nombre infini de termes  $(z - z_0)^k$  avec  $k < 0$ .

Au voisinage d'un pôle  $z_0$ , une fonction holomorphe  $f(z)$  tend vers  $\infty$  lorsque  $z \rightarrow z_0$ . Le comportement au voisinage d'une singularité essentielle est beaucoup plus complexe.

Exemple. La fonction  $e^{1/z}$  possède une singularité essentielle à l'origine. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} &= 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} e^{1/iy} &\text{ n'existe pas.}\end{aligned}$$

Remarque. Le point  $z = 0$  n'est pas une singularité isolée pour la fonction  $\ln z$ . Dans la théorie des **surfaces de Riemann**, un tel point s'appelle **point de ramification**. Il en est de même des points  $\pm i$  pour la fonction

$$\arctan z = \frac{1}{2i}(\log(z - i) - \log(z + i)).$$

Une fonction **méromorphe** dans un domaine  $D \subseteq \mathbb{C}$  est une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  qui est holomorphe à l'exception de singularités isolées qui sont toutes des pôles pour  $f$ . En lui attribuant la valeur  $\infty$  aux pôles, on peut la considérer comme une fonction  $D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  continue.

Exemples. Une fonction rationnelle est méromorphe dans le plan tout entier. Ainsi en est-il des fonctions

$$\frac{\sin z}{z^3}, \quad \frac{\cos z}{z^n - 1} \quad \text{et} \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

En soustrayant d'une fonction rationnelle  $R(z)$  toutes les **parties principales** (les termes avec exposants négatifs) des développements de Laurent aux divers pôles  $z_k$ , on obtient une fonction rationnelle sans aucun pôle, c'est-à-dire, un polynôme  $p$ ; c'est la décomposition en fractions partielles de la fonction :

$$R(z) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{k,j}}{(z - z_k)^j} + p(z).$$

## 7.2 Résidus

Soient  $f$  une fonction holomorphe dans un disque pointé  $0 < |z - z_0| < r$  et

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

son développement de Laurent en  $z_0$ . Le **résidu** de  $f$  en  $z_0$  est

$$\text{Rés}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

$C_\rho$  désignant le cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $\rho$  ( $0 < \rho < r$ ) parcouru dans le sens positif.

Lorsque  $z_0$  est un pôle d'ordre  $m$  pour  $f$ , le résidu peut aussi y être calculé par la formule

$$\text{Rés}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

Exemples. On a

$$\text{Rés}\left(\frac{\sin z}{z^3}, 0\right) = 0;$$

$$\text{Rés}\left(\frac{\cos z}{z^n - 1}, \omega_n^k\right) = \frac{1}{n} \omega_n^k \cos \omega_n^k, \quad 0 \leq k \leq n-1;$$

$$\text{Rés}(e^{1/z}, 0) = 1.$$

**Théorème 25** Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $D$  à l'exception de singularités isolées. Soit  $\mathcal{C}$  est un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ , ne passant par aucune des singularités de  $f$  et en contenant un nombre fini  $z_1, z_2, \dots, z_n$  dans son intérieur. Alors

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés}(f, z_k),$$

le chemin  $\mathcal{C}$  étant parcouru dans le sens positif.

Démonstration. La fonction étant holomorphe dans le domaine intersection de l'intérieur de  $\mathcal{C}$  et des extérieurs de petits disques centrés aux singularités, on voit que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz,$$

$C_k$  désignant un cercle centré en  $z_k$  et de rayon  $r_k$  suffisamment petit parcouru dans le sens positif. En intégrant terme à terme le développement de Laurent en  $z_k$ , on obtient

$$\int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Rés}(f, z_k).$$

C.Q.F.D.

Remarque. La formule de Cauchy,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

correspond au cas d'un pôle d'ordre  $n + 1$  en  $z_0$ .

Exemple. On a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z^3} dz = 0;$$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos z}{z^n - 1} dz = \frac{1}{2\pi i n} \sum_k \omega_n^k \cos \omega_n^k$$

la somme portant sur les  $k$  tels que  $\omega_n^k$  est intérieur à  $\mathcal{C}$ ;

$$\int_{\mathcal{C}} e^{1/z} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \text{ est intérieur à } \mathcal{C}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 7.3 La propriété de l'application ouverte

**Théorème 26** Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction méromorphe dans  $D$ . Soit  $\mathcal{C}$  est un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ , ne passant par aucun des zéros ni aucun des pôles de  $f$ .

Alors, désignant par  $Z_f$  le nombre de zéros de  $f$  dans l'intérieur de  $\mathcal{C}$  et par  $P_f$  celui de ses pôles,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f,$$

le chemin  $\mathcal{C}$  étant parcouru dans le sens positif.

Démonstration. La fonction  $z \mapsto f'(z)/f(z)$  est holomorphe dans  $D$  sauf aux zéros et aux pôles de  $f$ . Si

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

et,  $\mathcal{C}_0$  désignant un cercle centé en  $z_0$  et de rayon  $r_0$  suffisamment petit parcouru dans le sens positif,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k.$$

C.Q.F.D.

Le théorème précédent est connu sous le nom de **principe de l'argument** pour la raison suivante : choisissons un point  $z_1$  sur le chemin  $\mathcal{C}$  et une valeur  $\theta_1$  telle que

$$f(z_1) = |f(z_1)|e^{i\theta_1}$$

et parcourons  $\mathcal{C}$  dans le sens positif en laissant le nombre  $\theta$  dans la représentation

$$f(z) = |f(z)|e^{i\theta}$$

varier continûment. En désignant par  $\mathcal{C}_z$  le portion de  $\mathcal{C}$  entre  $z_1$  et  $z$ , on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \log |f(z)| - \log |f(z_1)| + i(\theta - \theta_1)$$

De retour au point  $z_1$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{z_1}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = i \Delta_{\mathcal{C}}(\theta_1)$$

est la variation de « l'argument » de  $f(z_1)$  le long de  $\mathcal{C}$ .

**Théorème 27** *L'image d'un domaine par une fonction holomorphe non constante est un domaine.*

Démonstration. Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $D$ . Il s'agit de montrer que  $f(D)$  est ouvert. Soit  $w_0 = f(z_0) \in f(D)$ . Il existe un disque pointé centré en  $z_0$ ,  $0 < |z - z_0| < 2r$ , dans lequel la fonction  $f(z) - w_0$  ne s'annule pas. Soit

$$\rho = \inf\{|f(\zeta) - w_0| \mid |\zeta - z_0| = r\} > 0$$

et considérons, pour  $|w - w_0| < \rho$ , la fonction

$$N(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

où  $C_r$  désigne le cercle centré en  $z_0$  et de rayon  $r$  parcouru dans le sens positif. Elle est continue

$$N(w_1) - N(w_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f'(\zeta)}{(f(\zeta) - w_1)(f(\zeta) - w_2)} d\zeta (w_1 - w_2)$$

et ne prend que des valeurs entières. Comme  $N(w_0) > 0$ , on doit avoir  $N(w) > 0$  pour tout  $w$  tel que  $|w - w_0| < \rho$ , c'est-à-dire que ce disque est contenu dans  $f(D)$ . C.Q.F.D.

Remarque. La démonstration précédente montre en fait que,  $N(w)$  étant le nombre de zéros de la fonction  $f(z) - w$  dans un voisinage de  $z_0$ , l'on a  $N(w) = N(w_0)$  pour tout  $w$  suffisamment près de  $w_0$ . En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit inversible dans un voisinage de  $z_0$  est que  $f'(z_0) \neq 0$ .

Une conséquence de la propriété de l'application ouverte est que la fonction inverse, lorsqu'elle existe, d'une fonction holomorphe est continue, donc holomorphe elle aussi :

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

**Théorème 28 (Rouché)** *Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes dans  $D$ . Soit  $\mathcal{C}$  est un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ . Si*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad z \in \mathcal{C},$$

*alors  $f$  et  $g$  ont le même nombre de zéros dans l'intérieur de  $\mathcal{C}$ .*

Démonstration. Considérons la fonction

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Elle est méromorphe dans  $D$ . Il suit de l'hypothèse que, quel que soit  $t \geq 0$ , la fonction  $f(z) - t$  n'a ni pôle ni zéro sur  $\mathcal{C}$ . Par suite, l'intégrale

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{h'(z)}{h(z) - t} dz$$

ne dépend pas de  $t$ , vaut  $Z_f - Z_g$  lorsque  $t = 0$  et tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . D'où

$$0 = Z_f - Z_g.$$

C.Q.F.D.

Exemple. L'équation

$$z^3 + e^{-1+iz} = 0$$

admet exactement trois racines de module strictement plus petit que 1, comme on le voit en appliquant le théorème de Rouché aux fonctions  $f(z) = -z^3 + e^{-1+iz}$  et  $g(z) = z^3$  sur le cercle  $|z| = 1$ .

## 7.4 Application aux transformées de Fourier

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue absolument intégrable. Sa **transformée de Fourier** est la fonction  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\hat{f}(\xi) = \mathfrak{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

C'est un outil essentiel des mathématiques appliquées. Elle peut souvent être obtenue via le calcul des résidus.

- Soient  $R$  une fonction rationnelle intégrable sur  $\mathbb{R}$  et  $z_k$  ses pôles. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{-i\xi x} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \text{Rés}(R(z) e^{-i\xi z}, z_k) & \text{si } \xi \leq 0, \\ -2\pi i \sum_{\Im z_k < 0} \text{Rés}(R(z) e^{-i\xi z}, z_k) & \text{si } \xi \geq 0. \end{cases}$$

Considérons le cas  $\xi \leq 0$ . Si le nombre  $A$  de la figure 8, page 64 est suffisamment grand,

$$\int_{C_A} R(z) e^{-i\xi z} dz = 2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \text{Rés}(R(z) e^{-i\xi z}, z_k).$$



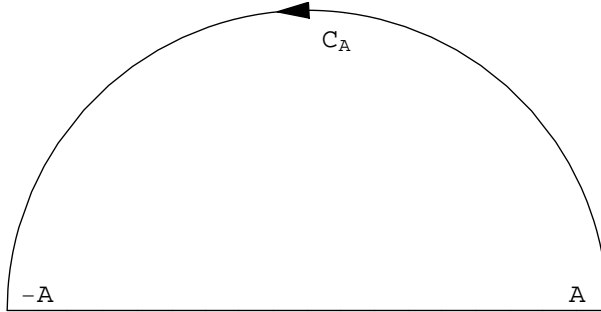


FIG. 8 – Une transformée de Fourier

Lorsque  $A \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_{-A}^A R(x)e^{-i\xi x} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{-i\xi x} dx$$

et

$$\left| \int_0^\pi R(Ae^{it}) e^{\xi A \sin t - i\xi A \cos t} i A e^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{K_R}{A^2} e^{\xi A \sin t} A dt \rightarrow 0.$$

Exemple.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\xi|}.$$

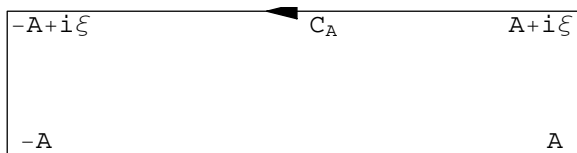


FIG. 9 – Une transformée de Fourier

• La fonction  $x \mapsto e^{-x^2/2}$  est sa propre transformée de Fourier, à un multiple près :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\xi x} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}.$$

Considérons le cas  $\xi \geq 0$  (figure 9, page 64). On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\xi x} dx = e^{-\xi^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2} dx$$

et, en vertu du théorème de Cauchy,

$$0 = \int_{-A}^A e^{-x^2/2} dx + \int_0^\xi e^{-(A+it)^2/2} i dt - \int_{-A}^A e^{-(x+i\xi)^2/2} dx - \int_0^\xi e^{-(A-it)^2/2} i dt.$$

Lorsque  $A \rightarrow +\infty$ ,

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2} dx = \sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2} dx$$

et

$$\left| \int_0^\xi e^{-(A\pm it)^2/2} i dt \right| \leq \int_0^\xi e^{-A^2+t^2} dt \rightarrow 0.$$

## 7.5 Application au calcul d'intégrales diverses

- Soit  $R$  une fonction rationnelle de deux variables. Alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \sum_{|z_k| < 1} \text{Rés} \left( \frac{1}{z} R \left( \frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i} \right), z_k \right).$$

(Les  $z_k$  sont les pôles de la fonction rationnelle

$$\frac{1}{z} R \left( \frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i} \right)$$

— on suppose qu'il n'y en a aucun sur le cercle unité.)

En effet,  $\mathcal{C}$  désignant le cercle unité parcouru dans le sens positif,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} R \left( \frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i} \right) dz \\ &= i \int_{-\pi}^{+\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \\ &= 2\pi i \sum_{|z_k| < 1} \text{Rés} \left( \frac{1}{z} R \left( \frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i} \right), z_k \right). \end{aligned}$$

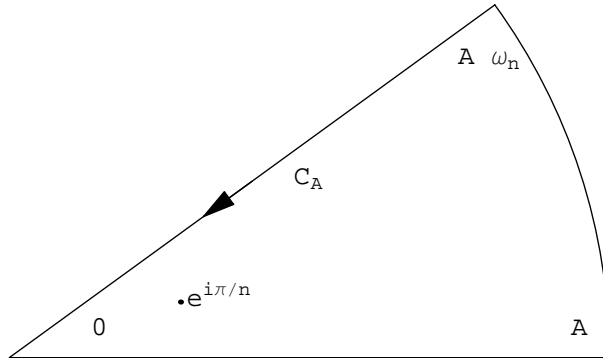


FIG. 10 – Un calcul d'intégrale

Exemple.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{a + \sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1.$$

•

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n}, \quad n > 1.$$

Si  $A > 1$ , on a (figure 10, page 66)

$$\int_{C_A} \frac{dz}{1 + z^n} = 2\pi i \operatorname{Rés} \left( \frac{1}{1 + z^n}, e^{i\pi/n} \right).$$

D'où

$$\int_0^A \frac{dx}{1 + x^n} + \int_0^{2\pi/n} \frac{i A e^{it}}{1 + A^n e^{int}} dt - \int_0^A \frac{e^{i2\pi/n}}{1 + x^n} dx = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\pi/n}.$$

Lorsque  $A \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{i2\pi/n}}{1 + x^n} dx = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\pi/n}$$

car

$$\left| \int_0^{2\pi/n} \frac{i A e^{it}}{1 + A^n e^{int}} dt \right| \leq \int_0^{2\pi/n} \frac{A}{A^n - 1} dt \rightarrow 0.$$

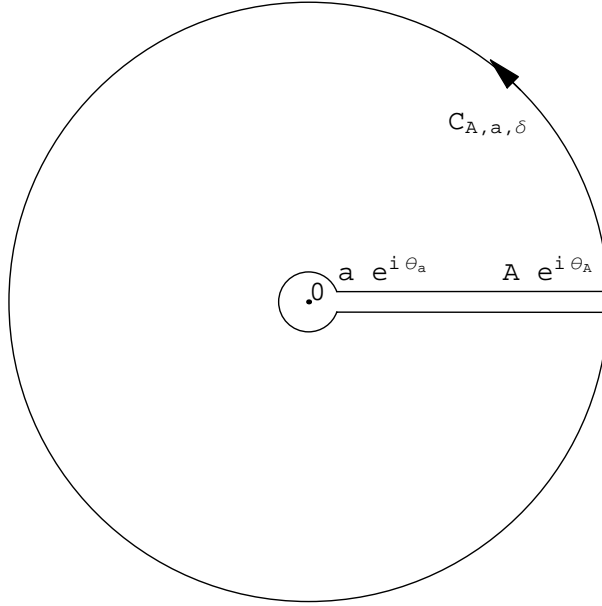


FIG. 11 – Un calcul d'intégrale

- Soient  $R$  une fonction rationnelle sans pôle sur l'axe réel positif et qui tend vers 0 lorsque  $z \rightarrow \infty$ ,  $z_k$  ses pôles et  $0 < p < 1$ . Alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^p} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i p}} \sum_{z_k} \text{Rés} \left( \frac{R(z)}{z^p}, z_k \right)$$

(où  $z^p = |z|^p e^{i p \theta}$  avec  $0 \leq \theta < 2\pi$ ).

Choisissons la détermination de  $z^p$  dans  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$  telle que  $z^p = |z|^p e^{i p \theta}$  avec  $0 < \theta < 2\pi$ . On a, dès que  $A$  est assez grand et  $\delta$  est assez petit, que (figure 11, page 67)

$$\int_{C_{A,a,\delta}} \frac{R(z)}{z^p} dz = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Rés} \left( \frac{R(z)}{z^p}, z_k \right).$$

Paramétrant,

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_A}^{2\pi - \theta_A} \frac{R(Ae^{it})}{A^p e^{i p t}} i A e^{it} dt - \int_{\theta_a}^{2\pi - \theta_a} \frac{R(ae^{it})}{a^p e^{i p t}} i a e^{it} dt \\ & + \int_{a \cos \theta_a}^{A \cos \theta_A} \frac{R(x + i \delta)}{(x + i \delta)^p} dx - \int_{a \cos \theta_a}^{A \cos \theta_A} \frac{R(x - i \delta)}{(x - i \delta)^p} dx = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Rés} \left( \frac{R(z)}{z^p}, z_k \right). \end{aligned}$$

Lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient

$$\int_0^{2\pi} \frac{R(Ae^{it})}{A^p e^{ipt}} iAe^{it} dt - \int_0^{2\pi} \frac{R(ae^{it})}{a^p e^{ipt}} iae^{it} dt + \int_a^A \frac{R(x)}{x^p} dx - \int_a^A \frac{R(x)}{x^p e^{2\pi ip}} dx = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Rés} \left( \frac{R(z)}{z^p}, z_k \right).$$

Laisant enfin  $a \rightarrow 0$  et  $A \rightarrow +\infty$ ,

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{R(ae^{it})}{a^p e^{ipt}} iae^{it} dt \right| \leq K_R a^{1-p} \rightarrow 0,$$

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{R(Ae^{it})}{A^p e^{ipt}} iAe^{it} dt \right| \leq K'_R \frac{1}{A^p} \rightarrow 0$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^p} dx (1 - e^{-2\pi ip}) = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Rés} \left( \frac{R(z)}{z^p}, z_k \right).$$

Exemple.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

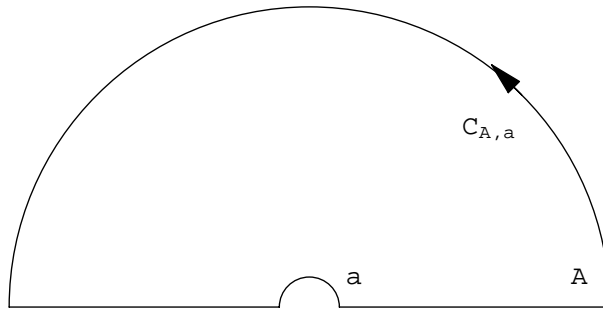


FIG. 12 – Un calcul d'intégrale

•

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En vertu du théorème de Cauchy (figure 12, page 68),

$$\int_{C_{A,a}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Paramétrant,

$$0 = \int_a^A \frac{2i \sin x}{x} dx + \int_0^\pi \frac{e^{iA \cos t - A \sin t}}{Ae^{it}} iAe^{it} dt - \int_0^\pi \frac{e^{ia \cos t - a \sin t}}{ae^{it}} iae^{it} dt.$$

Laissant  $A \rightarrow +\infty$  et  $a \rightarrow 0$ , on obtient

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{iA \cos t - A \sin t}}{Ae^{it}} iAe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi e^{-A \sin t} dt \rightarrow 0,$$

$$- \int_0^\pi \frac{e^{ia \cos t - a \sin t}}{ae^{it}} iae^{it} dt \rightarrow -\pi i$$

et

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{2i \sin x}{x} dx - i\pi.$$

•

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En vertu du théorème de Cauchy (figure 8, page 64),

$$\int_{\mathcal{C}_A} \frac{e^{iz} - 1 - iz}{z^2} dz = 0.$$

Paramétrant,

$$0 = \int_0^A \frac{e^{ix} + e^{-ix} - 2}{x^2} dx + \int_0^\pi \frac{e^{iA \cos t - a \sin t} - 1 - iAe^{it}}{Ae^{it}} i dt.$$

Laissant  $A \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_0^\pi \frac{e^{iA \cos t - a \sin t} - 1 - iAe^{it}}{Ae^{it}} i dt \rightarrow \pi$$

et

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{2(\cos x - 1)}{x^2} dx + \pi.$$

## 7.6 Exercices

1. Obtenir les séries de Laurent au point 1 des fonctions

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} \text{ et } \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}.$$

2. Obtenir la série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}, \quad 0 < |a| < |b|$$

dans le disque pointé  $0 < |z-a| < |b|-|a|$ .

3. Les fonctions de Bessel de première espèce  $J_k$  satisfont la relation

$$e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z)w^k, \quad w \neq 0.$$

En déduire que

$$J_k(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin t - kt) dt.$$

4. Classifier les singularités des fonctions

$$\frac{1}{e^z - 1}, \quad \frac{z}{(2 \sin z - 1)^2} \text{ et } \frac{z^3}{e^{1/z} - 1}.$$

5. Déterminer le résidu de la fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+1)}$$

à chacun de ses pôles.

6. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes en  $z_0$  et  $h(z) = f(z)/g(z)$ . Supposons que  $g$  admette un zéro simple en  $z_0$ . Calculer

$$\text{Rés}(h, z_0).$$

7. Soient  $p$  un polynôme et  $\mathcal{C}$  un chemin fermé contenant tous ses zéros dans son intérieur. Calculer

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

8. Soient  $f$  une fonction entière,  $\omega(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$  un polynôme ayant tous ses zéros distincts et  $\mathcal{C}$  un chemin fermé les contenant tous dans son intérieur. Montrer que

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) \omega(\zeta) - \omega(z)}{\omega(\zeta) (\zeta - z)} d\zeta$$

est un polynôme de degré  $n - 1$  qui coïncide avec  $f$  aux zéros de  $\omega$ .

9. Déterminer toutes les fonctions holomorphes réelles.  
 10. Déterminer toutes les fonctions holomorphes de module constant.  
 11. Montrer que, si  $a > e$ , l'équation  $az^n = e^z$  admet  $n$  racines dans le disque unité. Montrer que ce disque n'en contient aucune si  $ae < 1$ .  
 12. Démontrer : Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $H, h : D \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes dans  $D$ . Soit  $\mathcal{C}$  est un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ . Si

$$|h(z)| < |H(z)|, \quad z \in \mathcal{C},$$

alors  $H$  et  $H + h$  ont le même nombre de zéros dans l'intérieur de  $\mathcal{C}$ .

13. Montrer que les zéros du polynôme  $1 + 3z^m + 5z^n$  ( $1 < m < n$ ) sont tous situés dans la couronne  $1/3 < |z| < 1$ .  
 14. Utiliser le calcul des résidus pour calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}.$$

15. Montrer par le calcul des résidus que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{a + \sin \theta} d\theta = 2\pi \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

lorsque  $a > 1$ .

16. Évaluer par le calcul des résidus

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \sin \theta}, \quad a^2 > b^2 + c^2.$$

17. Montrer par le calcul des résidus que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin 2\pi/n}, \quad n > 2.$$



18. Évaluer par le calcul des résidus

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)}, \quad 0 < p < 1.$$

19. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x} dx, \quad 0 < p < 1.$$

## 8 PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES FONCTIONS HOLOMORPHES

Les transformations du plan effectuées à l'aide de fonctions holomorphes jouissent d'une propriété remarquable.

### 8.1 Transformations conformes

Lorsque deux courbes différentiables  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de paramétrage respectif

$$z = z_1(t) \text{ et } z = z_2(t), \quad a \leq t \leq b,$$

se coupent en un point  $z_0 = z_1(t_0) = z_2(t_0)$ ,  $a < t_0 < b$ , l'angle  $\alpha$  qu'elles forment est, par définition, l'angle (compris entre 0 et  $\pi$ ) que forment les « vecteurs »  $z_1'(t_0)$  et  $z_2'(t_0)$  :

$$\alpha = \arccos \frac{\Re \left( z_1'(t_0) \overline{z_2'(t_0)} \right)}{|z_1'(t_0)| |z_2'(t_0)|}.$$

On remarque que l'angle  $\beta$  formé par les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $-\mathcal{C}_2$  est

$$\beta = \pi - \alpha.$$

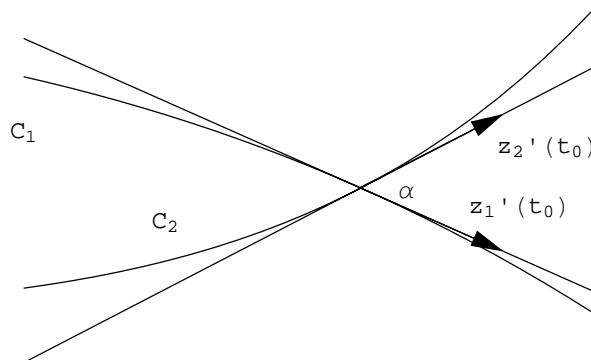


FIG. 13 – Angle entre deux courbes

Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $z_0 \in D$ . Supposons que  $f'(z_0) \neq 0$ . Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux courbes différentiables

se coupant en  $z_0$ . Alors  $t \mapsto f(z_1(t))$  et  $t \mapsto f(z_2(t))$  sont deux courbes différentiables se coupant en  $w_0 = f(z_0)$ . L'angle qu'elles y forment est

$$\arccos \frac{\Re \left( f'(z_0) z_1'(t_0) \overline{f'(z_0) z_2'(t_0)} \right)}{|f'(z_0) z_1'(t_0)| |f'(z_0) z_2'(t_0)|} = \arccos \frac{\Re \left( z_1'(t_0) \overline{z_2'(t_0)} \right)}{|z_1'(t_0)| |z_2'(t_0)|}.$$

On exprime ceci en disant que la transformation  $w = f(z)$  est **conforme** aux points où  $f'(z) \neq 0$ . Si  $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$  et  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ , on a

$$f(z) - w_0 \approx f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n \quad \text{si } z - z_0 \approx 0$$

et la transformation multiplie les angles par  $n$  en  $z_0$ .

Exemple. Considérons la transformation  $w = z^2$  (page 17). On a

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad v = 2xy.$$

Les images inverses des courbes  $u = cste$  et  $v = cste$  sont les hyperboles

$$x^2 - y^2 = u \quad \text{et} \quad xy = \frac{v}{2}$$

respectivement (figure 2, page 20). Ces courbes se coupent à angle droit : on a

$$z_1(t) = t + i\sqrt{t^2 - u} \quad \text{et} \quad z_2(t) = t + i\frac{v}{2t}.$$

Lorsque les hyperboles se coupent,

$$\sqrt{t^2 - u} = \frac{v}{2t}$$

et

$$\Re \left( z_1'(t) \overline{z_2'(t)} \right) = 1 - \frac{tv}{2t^2 \sqrt{t^2 - u}} = 0.$$

Au point 0, les images inverses des courbes  $u = 0$  et  $v = 0$  sont les droites  $y = \pm x$ ,  $y = 0$  et  $x = 0$  qui se coupent sous un angle de  $\pi/4$ .

Exemple. Considérons la transformation  $w = e^z$  (page 23). On a

$$u = e^x \cos y \quad \text{et} \quad v = e^x \sin y.$$

Les images directes des courbes  $x = cste$  et  $y = cste$  sont les cercles

$$u^2 + v^2 = e^{2x}$$

et les droites

$$v = u \tan y$$

respectivement. Ces courbes se coupent à angle droit : on a

$$z_1(t) = e^{x+it} \text{ et } z_2(t) = t(+i \tan y).$$

À l'intersection,

$$e^x \cos t = t, \quad e^x \sin t = t \tan y$$

et

$$\Re \left( z_1'(t) \overline{z_2'(t)} \right) = -e^x \sin t + e^x \cos t \tan y = 0.$$

## 8.2 Les transformations homographiques

Les fonctions homographiques

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

forment un groupe pour le produit fonctionnel  $T_2 \circ T_1$  : on a

$$T_2(T_1(z)) = \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)}$$

avec

$$(a_2 a_1 + b_2 c_1)(c_2 b_1 + d_2 d_1) - (a_2 b_1 + b_2 d_1)(c_2 a_1 + d_2 c_1) = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2)$$

et

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Ce groupe est engendré par

$$T_1(z) = \frac{1}{z}, \quad T_2(z) = kz \text{ et } T_3(z) = z + k$$

puisque

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{a}{d}}{z + \frac{d}{c}}$$

lorsque  $c \neq 0$ .

Puisque

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

les transformations homographiques  $w = T(z)$  effectuent une représentation conforme de  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$  lorsque  $c \neq 0$ .

Un **cercle de  $\bar{\mathbb{C}}$**  est, par définition, l'image par la projection stéréographique d'un cercle sur  $\mathbb{S}^2$  (page 13). Il correspond à l'ensemble des points  $z$  du plan tels que

$$Cz\bar{z} + Az + \bar{A}\bar{z} = D \tag{1}$$

avec

$$C, D \in \mathbb{R} \text{ tels que } -CD < |A|^2. \tag{2}$$

Si  $w = 1/z$ , l'équation (1) devient

$$Dw\bar{w} - \bar{A}w - A\bar{w} = C,$$

si  $w = kz$ , elle devient

$$\frac{C}{|k|^2}w\bar{w} + \frac{A}{k}w + \frac{\bar{A}}{\bar{k}}\bar{w} = D$$

et si, enfin,  $w = z + k$ , elle devient

$$Cw\bar{w} + (A - C\bar{k})w + (\bar{A} - Ck)\bar{w} = D + Ak + \bar{A}\bar{k} - C|k|^2.$$

Dans les trois cas, la relation (2) est préservée. Les transformations homographiques préservent donc les cercles de  $\bar{\mathbb{C}}$  et, par suite, elles préservent les **domaines circulaires**, c'est-à-dire les domaines déterminés par les cercles de  $\bar{\mathbb{C}}$ .

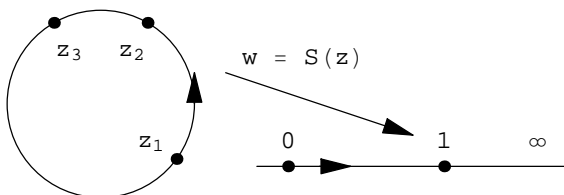


FIG. 14 – Une transformation homographique

Exemple. La transformation homographique appliquant trois points  $z_1, z_2$  et  $z_3$  donnés sur  $0, 1$  et  $\infty$  respectivement est

$$w = S_{z_1, z_2, z_3}(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

Cette transformation applique donc le cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$  passant par ces trois points sur l'axe réel, le sens de parcours du cercle déterminé par la position des trois points correspondant au sens de parcours de  $-\infty$  à  $+\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et les deux domaines circulaires déterminés par ce cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$  étant appliqués sur les demi-plans  $\Re w > 0$  et  $\Re w < 0$ .

Exemple. La transformation homographique la plus générale du demi-plan  $\Re z > 0$  sur lui-même est de la forme

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc > 0.$$

En effet, son zéro et son pôle doivent être réels et elle doit être croissante sur l'axe réel.

Le **rapport anharmonique** de quatre nombres complexes  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  est

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}.$$

(Cette définition est étendue par continuité pour accommoder le cas où l'un des points est  $\infty$ ). Si, pour  $1 \leq j \leq 4$ ,  $w_j = 1/z_j$ ,  $w_k = kz_j$  ou  $w = z_j + k$ , on a

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Les transformations homographiques préservent donc le rapport anharmonique. La relation

$$[w_1, w_2, w_3, w] = [z_1, z_2, z_3, z]$$

fournit ainsi une façon d'exprimer l'unique transformation homographique appliquant trois points donnés  $z_1, z_2, z_3$  sur trois points donnés  $w_1, w_2, w_3$ . Elle permet par le fait même d'appliquer un cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$  donné sur un cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$  donné ou un domaine circulaire donné sur un domaine circulaire donné.

Exemple. Pour appliquer le demi-plan  $x > 0$  sur le demi-plan  $u + v > 1$ , il suffit d'appliquer les points  $-i, 0, i$  sur  $1, (1+i)/2, i$ , ce qui peut être fait à partir de la relation

$$\left[1, \frac{1+i}{2}, i, w\right] = [-i, 0, i, z]$$

et qui donne

$$w = \frac{1+i}{2}(z+1).$$

Le **symétrique**  $z^*$  d'un point  $z$  par rapport au cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$  passant par  $z_1, z_2, z_3$  est défini par la relation

$$[z_1, z_2, z_3, z^*] = \overline{[z_1, z_2, z_3, z]}.$$

Cette définition, comme il se doit, ne dépend que du cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$  et non pas des points  $z_1, z_2, z_3$  choisis. En effet, la définition de  $z^*$  peut être réécrite sous la forme :

$$z^* = S_{z_1, z_2, z_3}^{-1} \left( \overline{S_{z_1, z_2, z_3}(z)} \right).$$

Si  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  sont trois autres points du cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$  passant par  $z_1, z_2, z_3$ , on a

$$S_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}^{-1} \left( \overline{S_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}(z)} \right) = S_{z_1, z_2, z_3}^{-1} \left( \overline{S_{z_1, z_2, z_3}(z)} \right)$$

si et seulement si

$$\overline{S_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}(z)} = S_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3} \left( S_{z_1, z_2, z_3}^{-1} \left( \overline{S_{z_1, z_2, z_3}(z)} \right) \right)$$

ou encore, en posant  $w = S_{z_1, z_2, z_3}(z)$ , si et seulement si

$$\overline{S_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3} \left( S_{z_1, z_2, z_3}^{-1}(w) \right)} = S_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3} \left( S_{z_1, z_2, z_3}^{-1}(\overline{w}) \right).$$

Cette dernière relation est vraie parce que la fonction

$$S_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3} \circ S_{z_1, z_2, z_3}^{-1}$$

est réelle sur l'axe réel (théorème 21, page 52).

Exemples. Lorsque le cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$  est l'axe réel, on retrouve

$$z^* = \bar{z}.$$

Lorsque le cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$  est le cercle unité, on obtient

$$z^* = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Puisqu'elles préservent le rapport anharmonique, les transformations homographiques préservent la symétrie par rapport aux cercles de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Exemple. La transformation homographique la plus générale du disque  $D(0,1)$  sur lui-même est de la forme

$$w = k \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{où } |a| < 1 \text{ et } |k| = 1.$$

En effet, si elle applique  $a$  sur 0, elle doit appliquer le symétrique  $1/\bar{a}$  de  $a$  sur le symétrique  $\infty$  de 0 et, si  $|z| = 1$ ,  $|z - a| = |1 - \bar{a}z|$ .

### 8.3 Exercices

1. Soit  $w = \cos z$ . Déterminer l'image des courbes  $x = cste$  et  $y = cste$  sous cette transformation. Vérifier que ces images se coupent à angle droit lorsque  $z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
2. Vérifier que les transformations homographiques de la forme

$$w = k \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{où } |a| < 1, |k| = 1,$$

forment un groupe.

3. Déterminer l'image du disque unité  $D(0,1)$  sous la transformation homographique

$$w = \frac{z}{1 - z}.$$

4. Représenter conformément le disque unité  $D(0,1)$  sur le demi-plan  $\Im w > 0$  de telle sorte que trois points donnés  $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$  où  $0 < \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$  soient appliqués sur trois points  $0 < a < b < c$  donnés.
5. Déterminer une transformation homographique qui applique  $1, i, -1$  sur  $0, 1, \infty$ . Quelle est l'image du disque unité  $D(0,1)$  sous cette transformation ?
6. Représenter conformément le disque unité  $D(0,1)$  sur le demi-plan  $\Re w + \Im w > 1$ .
7. Déterminer le symétrique  $z^*$  d'un point  $z$  par rapport à un cercle  $|z - z_0| = r$ .
8. Déterminer la forme générale des transformations homographiques appliquant le disque  $D(z_0, r)$  sur le disque  $D(0,1)$ .
9. Soit  $|z_0| < 1$ . Déterminer une transformation homographique  $T$  du disque unité sur lui-même telle que  $T(z_0) = 0$  et  $T'(z_0) > 0$ .



10. Montrer que la transformation homographique la plus générale qui applique le demi-plan  $\Re z > 0$  sur le disque unité  $D(0, 1)$  est

$$w = k \frac{z - a}{z - \bar{a}} \quad \text{où } \Re a > 0, |k| = 1.$$

Quelle est la transformation inverse ?

11. Soit  $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que  $|f(z)| < 1$ . Montrer que, quels que soient  $z_1, z_2$ , on a

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| < 1.$$

12. Soit  $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que  $|f(z)| < 1$ . Montrer que

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)} \right| \leq |z|.$$

Que devient cette inégalité lorsque  $z \rightarrow 0$  ?

13. Représenter conformément le disque unité  $D(0, 1)$  sur le premier quadrant  $\Re w > 0, \Im w > 0$ .
14. Représenter conformément le demi-plan  $\Im z < 0$  sur la bande  $a < \Im w < b$ .
15. Représenter conformément le disque unité  $D(0, 1)$  sur  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 1/4]$ .

## 9 FONCTIONS HARMONIQUES

Les fonctions holomorphes sont non seulement analytiques mais aussi harmoniques.

### 9.1 L'équation de Laplace

Soit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. Elle est **harmonique** dans  $D$  si elle y admet des dérivées partielles d'ordre deux continues qui y satisfont l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Une fonction complexe est donc harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

Les fonctions harmoniques jouent un rôle important en mathématiques appliquées, particulièrement en physique mathématique.

Exemple. Lorsque dans une région de l'espace  $\mathbb{R}^3$  l'état stationnaire est atteint, la température  $T(x, y, z)$  y satisfait l'équation de Laplace. Dans certaines circonstances, par exemple lorsque la région en question est un cylindre « infini » dans la direction de  $z$ ,  $T$  ne dépend que de deux variables  $x$  et  $y$ .

Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Alors  $f$  est harmonique dans  $D$ . En effet, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h + i y) - f(x + i y)}{h} = f'(x + i y)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + i(y + h)) - f(x + i y)}{h} = i f'(x + i y)$$

de telle sorte que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''(x + i y) - f''(x + i y) = 0.$$

La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont donc des fonctions harmoniques réelles — on dit qu'elles sont des fonctions harmoniques conjuguées. Cet énoncé admet une réciproque.

Si  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine contenant le disque  $D(z_0, r)$  et  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction harmonique réelle dans  $D$ , il existe une fonction  $f : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe dont  $u$  est la partie réelle dans  $D(z_0, r)$  :

$$u = \Re f \quad \text{dans } D(z_0, r).$$

Les dérivées partielles  $u_x$  et  $u_y$ , admettant des dérivées partielles continues dans  $D$ , sont elles-même continues dans  $D$ . Posons

$$v(x, y) = \int_{x_0}^x -\frac{\partial u}{\partial y}(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, \eta) d\eta$$

pour  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$ . Alors

$$\frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, \eta) d\eta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

lorsque  $\Delta y \rightarrow 0$ . En vertu du théorème des accroissements finis, il existe  $\theta \in [0, 1]$  tel que

$$\begin{aligned} & \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} -\frac{\partial u}{\partial y}(\xi, y_0) d\xi + \frac{1}{\Delta x} \int_{y_0}^y \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, \eta) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, \eta) \right) d\eta \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} -\frac{\partial u}{\partial y}(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x + \theta \Delta x, \eta) d\eta \\ &\quad \rightarrow -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \eta) d\eta \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, \eta) d\eta = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$  en utilisant la continuité uniforme de  $u_{xx}$  puis l'équation de Laplace.

La fonction

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

ayant dans  $D(z_0, r)$  une partie réelle et une partie imaginaire admettant des dérivées partielles continues qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann,  $f$  est donc holomorphe.

## 9.2 Propriétés

Les propriétés des fonctions holomorphes ne se traduisent pas toutes par des propriétés analogues pour les fonctions harmoniques de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$ .

Deux fonctions harmoniques peuvent coïncider sur un ensemble avec point d'accumulation sans nécessairement coïncider partout, par exemple,  $u_1(x, y) = 0$  et  $u_2(x, y) = y$  coïncident sur l'axe réel.

Une fonction harmonique réelle  $u$  ne peut avoir ni maximum ni minimum local car, si, au voisinage de  $z_0$ , on a  $u = \Re f$  avec  $f$  holomorphe, la fonction holomorphe  $e^f$  ne peut avoir ni module maximum ni module minimum en  $z_0$ .

L'image, enfin, d'un domaine par une fonction harmonique réelle est un intervalle ouvert donc, l'image d'un domaine par une fonction harmonique complexe est un domaine.

**Théorème 29 (Poisson)** *Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine contenant le disque  $\overline{D}(0, 1)$  et  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction harmonique réelle dans  $D$ . Alors, on a, pour tout  $r < 1$ ,*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} u(e^{it}) dt.$$

Démonstration. La distance entre le cercle  $|z| = 1$  et l'ensemble  $D^c$  étant strictement positive (exercice 1, page 27), il existe  $R > 1$  tel que  $D(0, R) \subseteq D$ . Soit  $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que

$$u = \Re f \quad \text{dans } D(0, R).$$

Désignons par  $C$  le cercle unité parcouru dans le sens positif et par  $z$  le point  $re^{i\theta}$ . En vertu de la formule et du théorème de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

et

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - 1/\bar{z}} d\zeta.$$

Soustrayant,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z - 1/\bar{z}}{(\zeta - z)(\zeta - 1/\bar{z})} f(\zeta) d\zeta$$

et paramétrant,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it}) dt.$$

Le résultat suit en prenant les parties réelles de chaque membre. C.Q.F.D.

### 9.3 Application aux EDP

Une **É**quation aux **D**érivées **P**artielles est une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et qui contient des dérivées partielles de cette fonction — l'expression s'oppose aux **É**quations **D**ifférentielles **O**rdinaires pour les fonctions d'une seule variable. Les EDP les plus simples admettent souvent des solutions exprimables au moyen des fonctions élémentaires de l'analyse — en général, des méthodes numériques sont nécessaires.

Exemple. Le problème de Dirichlet consiste à déterminer une fonction harmonique dans un domaine qui prenne des valeurs données sur le bord de ce domaine.

La démonstration du prochain théorème s'appuiera sur le résultat auxiliaire suivant.

**Lemme 1** *Soit  $\phi : [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue admettant une dérivée partielle par rapport à son premier argument telle que la fonction  $\phi_x : [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  soit aussi continue. Alors*

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x, t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dt.$$

Démonstration. En vertu du théorème des accroissements finis, il existe  $\theta \in [0, 1]$  tel que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \int_{\alpha}^{\beta} (\phi(x + \Delta x, t) - \phi(x, t)) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x + \theta \Delta x, t) dt \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dt \end{aligned}$$

lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ , en vertu de la continuité uniforme de la fonction  $\phi_x$ . C.Q.F.D.

**Théorème 30 (Poisson)** *Soit  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et périodique de période  $2\pi$ . Alors la fonction  $u : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} U(t) dt$$

*est harmonique et, pour tout  $\theta$ ,*

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta}) = U(\theta).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} U(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos s+r^2} U(\theta-s) ds. \end{aligned}$$

La fonction  $u$  est la donc convolution de la donnée  $U$  avec le noyau de Poisson

$$P_r(s) = \frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos s+r^2)}$$

sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ . Puisque  $(z = re^{i\theta}, \zeta = e^{it})$

$$P_r(\theta-t) = \frac{1}{1-z\bar{\zeta}} + \frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta},$$

ce noyau est une fonction harmonique dans  $D(0, 1)$  (exercice 2, page 88) — on peut d'ailleurs le vérifier directement de son expression en coordonnées cartésiennes

$$\frac{1-x^2-y^2}{1-2x\cos t-2y\sin t+x^2+y^2}.$$

En utilisant le lemme précédent, on voit de sa première expression que la fonction  $u$  est harmonique dans  $D(0, 1)$ . Pour calculer la limite, on utilise la seconde expression. Comme

$$P_r(s) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(s) ds = 1,$$

on a

$$\begin{aligned} |u(re^{i\theta}) - U(\theta)| &= \left| \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(s)(U(\theta-s) - U(\theta)) ds \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(s)|U(\theta-s) - U(\theta)| ds \\ &= \int_{|s|<\delta} P_r(s)|U(\theta-s) - U(\theta)| ds + \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} P_r(s)|U(\theta-s) - U(\theta)| ds \\ &\leq \sup\{|U(\theta-s) - U(\theta)| \mid |s| < \delta\} \\ &\quad + 2 \sup\{|U(t)| \mid t \in \mathbb{R}\} \frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos\delta+r^2)}. \end{aligned}$$

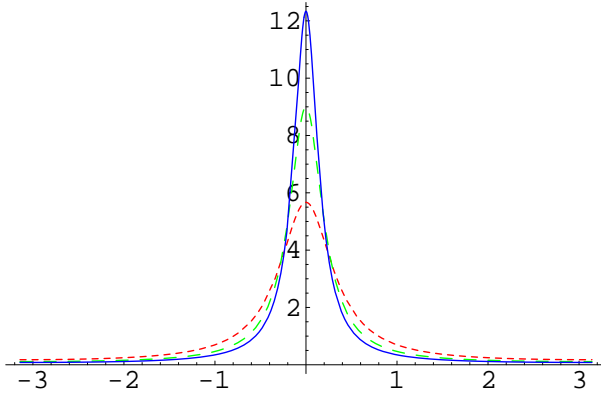


FIG. 15 – Le noyau de Poisson

Donné  $\epsilon > 0$ , on peut choisir  $\delta > 0$  pour que le premier terme soit inférieur à  $\epsilon/2$  et ensuite  $r > r_{\epsilon, \delta} = r_\epsilon$  pour que le second terme satisfasse la même inégalité. C.Q.F.D.

Remarque. Puisque  $(z = re^{i\theta}, \zeta = e^{it})$

$$P_r(\theta - t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^k e^{ik(\theta-t)},$$

on a

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^k c_k e^{ik\theta}$$

où

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(t) e^{-ikt} dt$$

est le  $k^{\text{ième}}$  coefficient de Fourier de la fonction  $U$ .

Remarque. La démonstration précédente établit en fait que

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta}) = U(\theta)$$

aux points de continuité de  $U$  —  $U$  peut avoir des points de discontinuité pourvu qu'elle soit intégrable et bornée. Considérons ainsi la fonction  $U$  définie sur  $] -\pi, \pi]$  par

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \pi, \\ -1 & \text{si } -\pi < t < 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos s+r^2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{1-r^2}{1-2r\cos s+r^2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^{+\infty} r^k e^{ik(\theta-t)} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k e^{-ik(\theta-t)} \right) dt \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left( \sum_{k=0}^{+\infty} r^k e^{ik(\theta-t)} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k e^{-ik(\theta-t)} \right) dt \\
&= \frac{2}{\pi i} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{r^{2j+1} e^{i(2j+1)\theta}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{r^{2j+1} e^{-i(2j+1)\theta}}{2j+1} \right) \\
&= \frac{2}{\pi i} (\phi(z) - \phi(\bar{z})) = \frac{4}{\pi} \Im \phi(z)
\end{aligned}$$

en intégrant les séries terme à terme et en posant

$$\phi(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^{2j+1}}{2j+1}, \quad |z| < 1.$$

En utilisant la transformation homographique

$$T(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

on peut écrire

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{1}{2} \int_0^z \frac{T'(\zeta)}{T(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2} \log T(z).$$

Puisque  $\Re T(z) > 0$  lorsque  $|z| < 1$ , on a

$$u(re^{i\theta}) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\Im T(z)}{\Re T(z)}$$

c'est-à-dire finalement

$$u(re^{i\theta}) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2r \sin \theta}{1-r^2}$$

(figure 16, page 88).



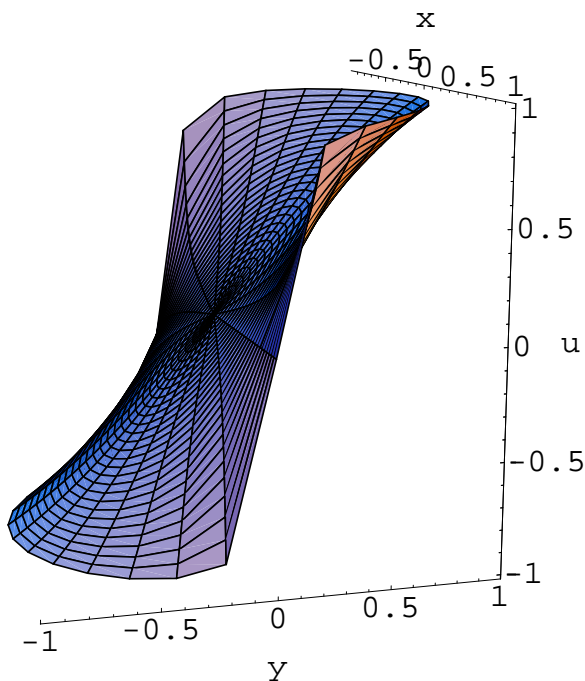


FIG. 16 – Un problème de Dirichlet

#### 9.4 Exercices

1. Soient  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction harmonique réelle et  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant une deuxième dérivée continue. Sous quelles conditions la fonction composée  $\phi \circ u$  est-elle harmonique ?
2. Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Montrer que la fonction

$$u(z) = f(\bar{z})$$

est harmonique dans  $D$ .

3. Sous quelles conditions le polynôme

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

est-il harmonique ?

4. Déterminer une fonction entière dont  $u(x, y) = xy$  est la partie réelle.
5. Déterminer une fonction entière dont  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$  est la partie réelle.

6. Soit  $f$  une fonction entière. Vérifier que la fonction  $\phi(z) = \ln |f(z)|$  satisfait l'équation de Laplace.
7. Soit  $f$  une fonction entière. Vérifier que

$$\frac{\partial^2 |f|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f|^2}{\partial y^2} = 4|f'|^2.$$

8. Évaluer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2r \cos t + r^2}, \quad 0 < r < 1.$$

9. Évaluer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nt \, dt}{R^2 - 2rR \cos(\theta - t) + r^2}, \quad 0 < r < R.$$

## Références

- [1] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, Paris, 1985.  
Manuel de premier cycle,  
Math-Info QA 331 C37 1978.
- [2] Jean Kuntzmann. *Variable complexe*. Hermann, Paris, 1967.  
Manuel de premier cycle,  
Math-Info QA 331 K86.
- [3] Herbert Robbins Richard Courant. *What is Mathematics?* Oxford University Press, Toronto, 1978.  
Ouvrage classique de vulgarisation,  
Math-Info QA 37 C68.
- [4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1975.  
Manuel de deuxième cycle,  
Math-Info QA 300 R8312.

## Index

- angle entre deux courbes, 73
- argument, 6
- cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$ , 76
- chemin, 37
- conjugué, 5
- convolution, 85
- corps algébriquement clos, 22
- courbe continue, 19
- courbe différentiable, 34
- courbe différentiable par morceaux, 37
- courbe linéaire par morceaux, 19
- dérivées partielles, 31
- détermination d'une fonction multivoque, 44
- degré d'une fonction rationnelle, 23
- domaine, 13
- domaine circulaire, 76
- domaine extérieur, 34
- domaine intérieur, 34
- domaine simplement connexe, 42
- ensemble borné, 11
- ensemble compact, 11
- ensemble connexe, 13
- ensemble connexe par arc, 19
- ensemble convexe, 19
- ensemble fermé, 10
- ensemble ouvert, 10
- équation de Laplace, 81
- équations de Cauchy-Riemann, 32
- fonction analytique, 50
- fonction continue, 17
- fonction entière, 50
- fonction harmonique, 81
- fonction holomorphe, 29
- fonction homographique, 75
- fonction méromorphe, 58
- fonction uniformément continue, 17
- forme polaire, 6
- formule d'Euler, 24
- formule de Cauchy, 42
- formule de de Moivre, 7
- formule de Poisson, 83
- inégalités de Cauchy, 51
- intégrale curviligne, 37
- Jordan, 34
- longueur d'une courbe, 36
- module, 5
- multiplicité d'un zéro, 51
- normale, 35
- noyau de Poisson, 85
- ordre d'un zéro, 51
- pôle, 57
- pôle d'une fonction rationnelle, 23
- paramètre admissible, 34
- partie imaginaire, 5
- partie réelle, 5
- parties principales, 58
- plan achevé, 13
- point de ramification, 58
- point symétrique, 78
- principe de l'argument, 61
- principe de symétrie, 78
- principe du prolongement analytique, 52
- problème de Dirichlet, 84

projection stéréographique, 13

résidu, 59

règles des exposants, 25

racine primitive de l'unité, 7

rapport anharmonique, 77

sens de parcours positif, 35

singularité apparente, 57

singularité essentielle, 58

singularité isolée, 57

sphère de Riemann, 13

surfaces de Riemann, 58

tangente, 35

théorème fondamental de l'algèbre,  
22

transformée de Fourier, 63

transformation conforme, 74

transformation homographique, 75