Analyse complexe

Solutions des exercices

André Giroux
Département de mathématiques et statistique
Université de Montréal
Juin 2005

1 Introduction

2 Les nombres complexes

1. Expliquer pourquoi il est impossible de définir sur $\mathbb{C}$ une relation d'ordre compatible avec les opérations algébriques.

   Solution. Dans un corps ordonné, tout carré est positif et $-1 < 0$. Ici $i^2 = -1$.

2. Déterminer $\Re(1+i)^{2k+1}$ et $\Im(1+i)^{2k+1}$.

   Solution. En vertu du théorème du binôme, on a

$$(1+i)^{2k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j}(-1)^j + i\sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1}(-1)^j.$$

   On en déduit, en utilisant la formule de de Moivre, que

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j}(-1)^j = \cos(2k+1)\frac{\pi}{4}$$

   et que

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1}(-1)^j = \sin(2k+1)\frac{\pi}{4}.$$

3. Montrer que les racines non réelles d'une équation polynomiale à coefficients réels se présentent par paires de nombres complexes conjugués.

   Solution. On a

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

   Par suite, si

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0,$$

   on aura aussi

$$a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + \cdots + a_n \overline{z}^n = 0.$$

4. Si $\Im z > 0$, montrer que

$$\Im \frac{z}{1+z^2} > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad |z| < 1.$$

Solution. Posant $z = x + i\,y$, on a

$$\begin{aligned}\Im\frac{z}{1+z^2} &= \Im\frac{(x+i\,y)(1+x^2-y^2-i\,2xy)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}\\ &= \frac{-2x^2y+y+x^2y-y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} > 0\end{aligned}$$

si et seulement si

$$y(1-x^2-y^2) > 0.$$

5. Montrer que les nombres z_1, z_2 et z_3 sont alignés si et seulement si

$$\Im\left(\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\right) = 0.$$

Solution. Le point z_1 est sur la droite passant par z_2 et z_3 si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = tz_2 + (1-t)z_3$. D'autre part,

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = s \in \mathbb{R}$$

si et seulement si

$$z_1 = sz_2 + (1-s)z_3.$$

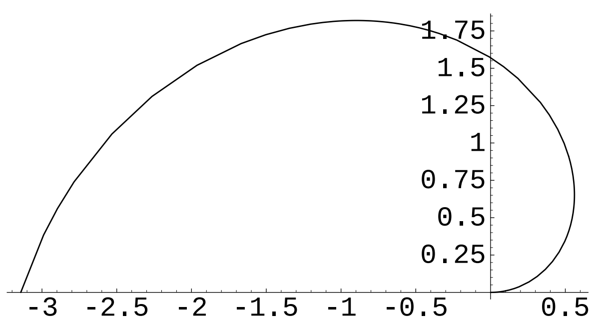

Fig. 1 – Une spirale

6. Décrire les courbes suivantes :
   - $|z| = \arg z$
   - $|1+z| = |1-z|$
   - $|1+z| = 2|1-z|$.

Solution. La courbe $|z| = \arg z$ est la portion de la spirale $r = \theta$ correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ (figure 1, page 2).

La courbe $|1+z| = |1-z|$ correspond à $(1+x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$ c'est-à-dire à la droite $x = 0$, l'ensemble des points équidistants de 1 et de -1.

La courbe $|1+z| = 2|1-z|$, quant à elle, s'écrit explicitement comme $3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$ et correspond au cercle centré en $(5/3, 0)$ et de rayon $4/3$.

7. Démontrer l'identité

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

En donner une interprétation géométrique.

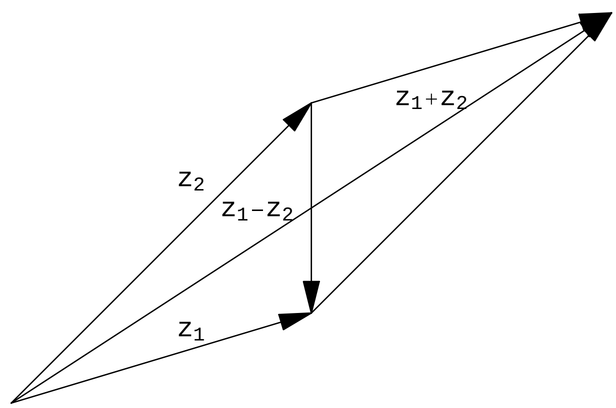

Fig. 2 – Un parallélogramme

Solution. On a

$$\begin{gathered}|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\Re z_1\,\overline{z_2} + |z_2|^2 \\ +|z_1|^2 + 2\Re z_1\,\overline{z_2} + |z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).\end{gathered}$$

Interprétation géométrique : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des côtés égale la somme des carrés des longueurs des diagonales (figure 2, page 3).

8. Soit $z \neq \pm 1$ un nombre complexe de module unité. Déterminer l'argument de

$$\frac{z-1}{z+1}.$$

Solution. Posant $z = \cos\theta + i\,\sin\theta$ avec $\theta \neq 0, \pi$, on a

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{\cos\theta - 1 + i\,\sin\theta}{\cos\theta + 1 + i\,\sin\theta} = \frac{i\,\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

de telle sorte que

$$\arg\frac{z-1}{z+1} = \pm\frac{\pi}{2}.$$

9. Montrer que $\cos n\theta$ peut s'exprimer comme un polynôme en $\cos\theta$,

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta),$$

où T_n est un polynôme de degré n — le n$^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev de première espèce. Calculer T_0, T_1 et T_2. Établir la relation de récurrence suivante :

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Solution. En utilisant le théorème du binôme et la formule de de Moivre, on obtient

$$\cos n\theta = \Re(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n = \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j}(-1)^j \cos^{n-2j}\theta(1-\cos^2\theta)^j$$

et

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j}(-1)^j x^{n-2j}(1-x^2)^j.$$

On a donc

$$T_0(x) = 1\ ,\ T_1(x) = x \ \text{ et } \ T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Utilisant les formules d'addition pour les fonctions trigonométriques,

$$\begin{gathered}
\cos(n+2)\theta = \cos(n+1)\theta\cos\theta - \sin(n+1)\theta\sin\theta \\
= \cos(n+1)\theta\cos\theta - \sin\theta(\sin n\theta\cos\theta + \sin\theta\cos n\theta) \\
= \cos(n+1)\theta\cos\theta - \cos n\theta + \cos^2\theta\cos n\theta - \cos\theta(-\cos(n+1)\theta + \cos\theta\cos n\theta) \\
= 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta.
\end{gathered}$$

Les polynômes $T_{n+2}(x)$ et $2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ coïncident ainsi sur l'intervalle $[-1,1]$ donc coïncident partout.

Le polynôme T_n s'annulant aux points

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\ ,\ k=0,1,\ldots,n-1$$

et valant ± 1 aux points

$$\cos\frac{k\pi}{n}\ ,\ k=0,1,\ldots,2n,$$

son graphe peut aisémant être tracé (figure 3, page 5).

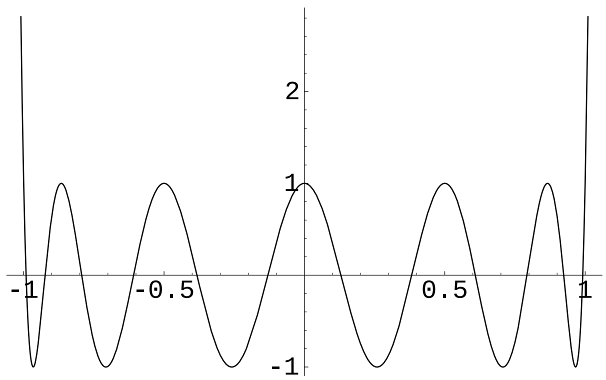

FIG. 3 – Un polynôme de Tchebychev

10. Résoudre les équations $(z-1)^3-1=0$, $z^4+2=0$ et $z^5-1=i$.
Solution. Directement de la formule pour la racine cubique d'un nombre complexe, les trois solutions de l'équation $(z-1)^3-1=0$ sont

$$1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\ ,\ 1+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\quad\text{et}\quad 2.$$

De même, pour $z^4+2=0$, on obtient

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\ ,\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\quad\text{et}\quad\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Pour l'équation $z^5-1=i$, on a

$$\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right),\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{20}+i\sin\frac{3\pi}{20}\right),\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{20}+i\sin\frac{5\pi}{20}\right),$$

$$\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20}+i\sin\frac{7\pi}{20}\right)\quad\text{et}\quad\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20}+i\sin\frac{9\pi}{20}\right).$$

11. Résoudre l'équation $(1+z)^5 = (1-z)^5$.

Solution. Si $(1+z)/(1-z) = w$, alors $z = (w-1)/(w+1)$. Les racines de $w^5 = 1$ étant les nombres $1, \omega_5, {\omega_5}^2, {\omega_5}^3, {\omega_5}^4$, celles de l'équation $(1+z)^5 = (1-z)^5$ sont

$$0 \ , \ (\omega_5 - 1)/(\omega_5 + 1) \ , \ ({\omega_5}^2 - 1)/({\omega_5}^2 + 1),$$
$$({\omega_5}^3 - 1)/({\omega_5}^3 + 1) \ \text{ et } \ ({\omega_5}^4 - 1)/({\omega_5}^4 + 1).$$

12. Soient ω_n la racine primitive $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ de l'unité et $k \in \mathbb{N}$. Calculer

$$1 + \omega_n^k + \omega_n^{2k} + \cdots + \omega_n^{(n-1)k}$$

et

$$1 - \omega_n^k + \omega_n^{2k} + \cdots + (-1)^{n-1}\omega_n^{(n-1)k}.$$

Solution. Puisque si $z \neq 1$,

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z},$$

on a, en faisant $z = {\omega_n}^k$,

$$1 + \omega_n^k + \omega_n^{2k} + \cdots + \omega_n^{(n-1)k} = 0$$

et, en faisant $z = -{\omega_n}^k$,

$$1 - \omega_n^k + \omega_n^{2k} + \cdots + (-1)^{n-1}\omega_n^{(n-1)k} = \frac{1+(-1)^n}{1+{\omega_n}^k}.$$

13. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\, i^n}{n+1} \ , \ \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n.$$

Solution. La première limite n'existe pas : les valeurs adhérentes de cette suite sont en effet les nombres $-1, -i, 1, i$. La deuxième limite est 0 puisque

$$\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

14. Calculer

$$\Re\left(\sum_{k=n}^{+\infty} (i\,y)^k\right) \ , \ |y| < 1.$$

Solution. Puisque si $|z| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z},$$

on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (i\,y)^k = \frac{(i\,y)^n}{1-i\,y}$$

et

$$\Re\left(\sum_{k=n}^{+\infty} (i\,y)^k\right) = \Re\frac{(i\,y)^n(1+i\,y)}{1+y^2}$$

c'est-à-dire

$$\Re\left(\sum_{k=n}^{+\infty} (i\,y)^k\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m y^{2m+1}}{1+y^2} & \text{si } n = 2m \ , \\ \dfrac{(-1)^m y^{2m+1}}{1+y^2} & \text{si } n = 2m+1. \end{cases}$$

15. Déterminer ceux des ensembles suivants qui sont des ensembles ouverts, fermés, bornés, connexes.
– $\{z \mid |z-1| < |z+1|\}$
– $\{z \mid |z-a| + |z+a| < 2r\}$, $(0 \geq a < r)$
– $\{z \mid |z-a| \geq 1\}$
– $\{z \mid z^7 = 1\}$.
Solution. Le demi-plan droit $\{z \mid |z-1| < |z+1|\}$ est ouvert, non borné et connexe.
L'ensemble $\{z \mid |z-a| + |z+a| < 2r\}$ est l'intérieur d'une ellipse (un cercle si $a = 0$) ; il est ouvert, borné et connexe.
L'ensemble $\{z \mid |z-a| \geq 1\}$, est fermé, non borné et connexe.
L'ensemble $\{z \mid z^7 = 1\}$ des racines $7^{ième}$ de l'unité est fermé, borné et disconnexe.

16. Montrer que, dans la projection stéréographique, l'hémisphère inférieur est appliquée sur le disque $D(0,1)$.
Solution. Puisque $(z = x + i\,y)$

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{1-\zeta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{1+\zeta}{1-\zeta},$$

on a $|z| < 1$ si et seulement si $\zeta < 0$.

17. Dans la projection stéréographique, quelle relation y a-t-il entre les images de points antipodaux ?

Solution. Les points (ξ_1, η_1, ζ_1) et (ξ_2, η_2, ζ_2) sont antipodaux si et seulement si le point $(0, 0, 0)$ est au milieu de la droite les joignant, c'est-à-dire si et seulement si

$$\xi_1 + \xi_2 = \eta_1 + \eta_2 = \zeta_1 + \zeta_2 = 0.$$

Alors

$$z_1 = \frac{\xi_1 + i\,\eta_1}{1 - \zeta_1} = \frac{-\xi_2 - i\,\eta_2}{1 + \zeta_2} = -z_2 \frac{1 - \zeta_2}{1 + \zeta_2} = -z_2 \frac{1}{|z_2|^2} = -\frac{1}{\overline{z_2}}.$$

3 Les fonctions complexes

1. Montrer que la distance

$$d(E, F) = \inf\{|z - w| \mid z \in E, w \in F\},$$

entre un ensemble compact E et un ensemble fermé F disjoints est strictement positive.

Solution. Soit

$$d(z, F) = \inf\{|z - w| \mid w \in F\}.$$

En vertu de l'inégalité

$$|d(z_1, F) - d(z_2, F)| \leq |z_1 - z_2|,$$

cette fonction est continue ; elle atteint donc son minimum sur l'ensemble compact E :

$$d(z_0, F) = \inf\{d(z, F) \mid z \in E\} \ , \ z_0 \in E.$$

En fait, si $R > 0$ est assez grand et si $F_R = F \cap \overline{D}(0, R)$, on aura

$$d(z_0, F) = \inf\{|z_0 - w| \mid w \in F_R\} = |z_0 - w_0|$$

en un point w_0 de l'ensemble compact F_R. Alors

$$0 < |z_0 - w_0| \leq d(E, F).$$

L'hypothèse E compact et essentielle comme le montre l'exemple des ensembles $E = \{y = 0\}$ et $F = \{xy = 1\}$.

2. Calculer u et v ($z = x + i\,y$, $w = u + i\,v$) si
$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$
Déterminer l'image du cercle unité par cette transformation.
Solution. On a
$$u = \frac{1}{2}\frac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}.$$
En posant $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$, on obtient
$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos t \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin t$$
ce qui représente une ellipse si $r \neq 1$ et le segment $[-1, 1]$ si $r = 1$.
3. Mêmes questions pour les transformations
   - $w = z^3$
   - $w = (2z-1)/(2-z)$
   - $w = (1+z)/(1-z)$.

   Solution. Pour $w = z^3$, on a
$$u = x(x^2 - 3y^2) \quad \text{et} \quad v = y(3x^2 - y^2).$$
Si $|z| = r$, $|w| = r^3$.
Pour $w = (2z-1)/(2-z)$, on a
$$u = \frac{-2x^2+2y^2+5x-2}{(2-x)^2+y^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{y(5-4x)}{(2-x)^2+y^2}.$$
Lorsque $z = e^{i\,t}$, on obtient
$$\left|\frac{2-e^{-i\,t}}{2-e^{i\,t}}\,e^{i\,t}\right| = 1.$$
Pour $w = (1+z)/(1-z)$, on a
$$u = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{2y}{(1-x)^2+y^2}.$$
Lorsque $|z| = 1$, $u = 0$ et $-\infty < v < +\infty$.

4. Trouver toutes les solutions de l'équation $e^z = -a$ $(a > 0)$.
Solution. Comparant les modules dans
$$e^x(\cos y + i\,\sin y) = -a,$$
on obtient $x = \ln a$ puis
$$(\cos y + i\,\sin y) = -1$$
entraîne $y = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$:
$$z = \ln a + i\,(2k+1)\pi\ ,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

5. Trouver toutes les solutions de l'équation $\cos z = w$ $(-1 < w < 1)$.
Solution. On veut que $e^{i\,z} + e^{-i\,z} = 2w$, c'est-à-dire $e^{i\,2z} - 2we^{i\,z} + 1 = 0$. En vertu de la formule de Viète,
$$e^{-y}(\cos x + i\,\sin x) = w \pm i\,\sqrt{1-w^2}.$$
Comparant les modules, on voit que $y = 0$. Les racines de l'équation sont donc ses racines réelles,
$$z = \arccos w + 2k\pi\ ,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

6. Trouver toutes les solutions de l'équation $\sinh z = i$.
Solution. On veut que $e^z - e^{-z} = 2i$, c'est-à-dire $e^{2z} - 2ie^z - 1 = 0$. En vertu de la formule de Viète,
$$e^x(\cos y + i\,\sin y) = i.$$
D'où $x = 0$ et
$$z = i\,\frac{(2k+1)\pi}{2}\ ,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

7. Si $ae^{is} + be^{it} = ce^{iu}$ $(a, b, c > 0)$, exprimer c et u en terme de a, s, b et t.
Solution. Des relations
$$a\cos s + b\cos t = c\cos u\ ,\ \ a\sin s + b\sin t = c\sin u,$$
on tire
$$c = \sqrt{a^2 + 2ab\cos(s-t) + b^2}$$
et
$$\tan u = \frac{a\sin s + b\sin t}{a\cos s + b\cos t}.$$

8. Déduire la formule

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

de la relation

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Solution. On a

$$\begin{aligned}
&\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\
&= \frac{1}{4}((e^{i\,z_1} + e^{-i\,z_1})(e^{i\,z_2} + e^{-i\,z_2}) + (e^{i\,z_1} - e^{-i\,z_1})(e^{i\,z_2} - e^{-i\,z_2})) \\
&= \frac{1}{2}(e^{i\,z_1} e^{i\,z_2} + e^{-i\,z_1} e^{-i\,z_2}) = \frac{1}{2}(e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}) \\
&= \cos(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

9. On considère la transformation $w = \cosh z$. Vérifier que

$$u = \cosh x \cos y \quad \text{et} \quad v = \sinh x \sin y.$$

En déduire une description géométrique.
Solution. On a

$$\begin{aligned}
&\cosh x \cos y + i\,\sinh x \sin y \\
&= \frac{1}{4}((e^{x} + e^{-x})(e^{i\,y} + e^{-i\,y}) + (e^{x} - e^{-x})(e^{i\,y} - e^{-i\,y})) \\
&= \frac{1}{2}(e^{x} e^{i\,y} + e^{-x} e^{-i\,y}) = \cosh z.
\end{aligned}$$

Les images directes des courbes $x = cste$ sont des ellipses

$$\frac{u^2}{\cosh^2 x} + \frac{v^2}{\sinh^2 x} = 1$$

et les images directes des courbes $y = cste$ sont des hyperboles

$$\frac{u^2}{\cos^2 y} - \frac{v^2}{\sin^2 y} = 1.$$

10. Montrer que

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

Solution. De la définition complexe de l'exponentielle, on tire

$$\begin{aligned}|e^z - 1| &= \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} - 1 \\ &= |z| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{(k+1)!} \leq |z| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} = |z| e^{|z|}.\end{aligned}$$

11. Soit

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z} \ , \ \Re z > 1.$$

Vérifier que la série converge uniformément dans tout demi-plan $\Re z \geq a > 1$. En déduire que sa somme est une fonction continue dans le demi-plan $\Re z > 1$.

Solution. Il suffit de majorer les modules des termes de la série par des constantes formant une série convergente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|k^z|} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} < +\infty$$

si $x \geq a > 1$.

12. À partir de la formule d'Euler, obtenir les identités

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin(2n+1)t/2}{2 \sin t/2}$$

et

$$\sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n+1)t = \frac{\sin^2(n+1)t}{\sin t}.$$

Solution. On a

$$1 + e^{i\,t} + e^{i\,2t} + \cdots + e^{i\,nt} = \frac{1 - e^{i\,(n+1)t}}{1 - e^{i\,t}}$$

donc

$$\begin{aligned}1 + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt &= \Re\left(\frac{e^{-i\,t/2} - e^{i\,(2n+1)t/2}}{e^{-i\,t/2} - e^{i\,t/2}}\right) \\ &= \Im\left(\frac{e^{i\,(2n+1)t/2} - e^{-i\,t/2}}{2 \sin t/2}\right) = \frac{\sin(2n+1)t/2}{2 \sin t/2} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Des relations

$$1 + e^{i\,t} + e^{i\,2t} + \cdots + e^{i\,(2n+1)t} = \frac{1 - e^{i\,(2n+2)t}}{1 - e^{i\,t}}$$

et

$$1 + e^{i\,2t} + e^{i\,4t} + \cdots + e^{i\,2nt} = \frac{1 - e^{i\,(n+1)2t}}{1 - e^{i\,2t}},$$

on tire

$$e^{i\,t} + e^{i\,3t} + \cdots + e^{i\,(2n+1)t} = (1 - e^{i\,(n+1)2t})\left(\frac{1}{1 - e^{i\,t}} - \frac{1}{1 - e^{i\,2t}}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} &\sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n+1)t \\ &= \Im\left((1 - e^{i\,(n+1)2t})\frac{-e^{i\,t} + 1}{(1 - e^{i\,t})(e^{-i\,t} - e^{i\,t})}\right) \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)2t}{2\sin t} = \frac{\sin^2(n+1)t}{\sin t}. \end{aligned}$$

13. Montrer qu'un polynôme trigonométrique de degré n admet au plus $2n$ zéros dans tout intervalle semi-ouvert de longueur 2π (tel $]-\pi, \pi]$).
Solution. Soit

$$T(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\,k\theta}$$

un tel polynôme. Le polynôme algébrique

$$p(z) = z^n \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$$

admettant au plus $2n$ zéros sur le cercle $|z| = 1$, T ne peut s'annuler plus de $2n$ fois sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

4 Fonctions holomorphes

1. Le théorème des accroissements finis est-il valable pour les fonction holomorphes ?
Solution. Non. Il n'existe aucun $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que

$$e^{2\pi i} - e^0 = e^\zeta(2\pi i - 0).$$

2. La fonction de Bessel de première espèce d'indice 0 est définie par la relation
$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{k!^2}.$$
Déterminer le rayon de convergence de la série. Vérifier que J_0 est une solution de l'équation différentielle
$$z^2 w'' + zw' + z^2 w = 0.$$
Solution. En vertu de la formule de Stirling, le rayon de convergence R est infini puisque
$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!^2} \right|^{1/2k} = \limsup_{k\to+\infty} \frac{e}{2k(2\pi k)^{1/2k}} = 0.$$
En dérivant la série terme à terme,
$$z^2 J_0''(z) + zJ_0'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!^2} (2k)^2$$
$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}(z/2)^{2j+2}}{j!^2(j+1)^2} 2^2(j+1)^2 = -z^2 J_0'(z).$$

3. Vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions suivantes :
   - $w = z^3$
   - $w = (z + 1/z)/2$
   - $w = \sin z$.

   Solution. Pour $w = z^3$, on a
$$u = x^3 - 3xy^2 \quad \text{et} \quad v = 3x^2y - y^3$$
de telle sorte que
$$u_x = 3x^2 - 3y^3 = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -6xy = -v_x.$$
Pour $w = (z + 1/z)/2$, on a
$$u = \frac{1}{2}\frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}\frac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2}$$
de telle sorte que
$$u_x = \frac{1}{2}\frac{(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = v_y$$

et que

$$u_y = \frac{1}{2}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x.$$

Pour $w = \sin z$, on a

$$u = \sin x \cosh y \quad \text{et} \quad v = \cos x \sinh y$$

de telle sorte que

$$u_x = \cos x \cosh y = v_y \quad \text{et} \quad u_y = \sin x \sinh y = -v_x.$$

4. Déterminer les conditions sur les constantes réelles a, b, c et d qui rendent la fonction $f(z) = ax + by + i\,(cx + dy)$ holomorphe.
Solution. On a

$$u_x = a \ , \ v_y = d \ , \ u_y = b \quad \text{et} \quad v_x = c.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que $a = d$ et que $b = -c$. On a alors

$$f(z) = (a + i\,c)(x + i\,y).$$

5. Un polygone régulier est inscrit dans le cercle unité et l'un de ses sommets est relié aux $n-1$ autres par des diagonales. Montrer que le produit des longueurs de ces diagonales est n.
Solution. Soient ${\omega_n}^k$, $0 \leq k \leq n-1$, les sommets du polygone et posons

$$p(z) = z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega_n^k).$$

Alors le produit des longueurs requis est

$$\left|\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega_n^k)\right| = |p'(1)| = n.$$

6. Montrer que les zéros de la dérivée d'un polynôme sont situés dans l'enveloppe convexe des zéros du polynôme (l'ensemble des combinaisons linéaires convexes de ces zéros) (théorème de Gauss-Lucas).
Solution. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les zéros du polynôme p et $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ ceux du polynôme dérivé. Si ζ_j n'est pas l'un des zéros de p, on a

$$0 = \frac{p'(\zeta_j)}{p(\zeta_j)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta_j - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{\zeta_j} - \overline{z_k}}.$$

Ainsi

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\zeta_j - z_k}{|\zeta_j - z_k|^2}$$

et

$$\zeta_j = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|\zeta_j - z_k|^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\zeta_j - z_k|^2}}$$

peut s'écrire comme une combinaison linéaire convexe des zéros de p.

5 Le calcul intégral

1. Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par $z = z(t), a \leq t \leq b$ et de longueur $\mathrm{L}_{\mathcal{C}}$. Montrer que la longueur d'arc s, définie par

$$s = \int_a^t |z'(\tau)|\, d\tau,$$

est un nouveau paramètre admissible relativement auquel la courbe est parcourue à vitesse constante. Faire les calculs explicites pour chacune des trois courbes suivantes :
– le segment $[0, 1]$;
– le cercle unité parcouru dans le sens positif ;
– la parabole d'équation $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$.
Solution. On a

$$\frac{ds}{dt} = |z'(t)| > 0 \ \text{ et } \ |z_1'(s)| = |z'(t)|\frac{dt}{ds} = 1.$$

Pour le segment $[0, 1]$, on peut prendre $z(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$ et alors $s = t$.
Pour le cercle unité parcouru dans le sens positif, on peut paramétrer par $z = e^{i\,t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ et $s = t$.
Pour la parabole d'équation $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$, on peut prendre $z = t + i\,t^2$ et alors, en posant $2\tau = \sinh \sigma$,

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + 4\tau^2}\, d\tau = \frac{1}{4}\mathrm{arcsinh}\, 2t + \frac{1}{2}t\sqrt{1 + 4t^2}.$$

2. Calculer, pour chaque courbe $\mathcal{C}$ de l'exercice précédent

$$\int_{\mathcal{C}} z\, dz\ ,\ \int_{\mathcal{C}} \Re z\, dz\ ,\ \int_{\mathcal{C}} |z|\, dz\ ,\ \int_{\mathcal{C}} \arg z\, dz.$$

Solution. Pour le segment $[0,1]$, on a

$$\int_{\mathcal{C}} z\,dz = \int_{\mathcal{C}} \Re z\,dz = \int_{\mathcal{C}} |z|\,dz = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

et

$$\int_{\mathcal{C}} \arg z\,dz = \int_0^1 0\,dt = 0.$$

Pour le cercle unité parcouru dans le sens positif (paramétré par $z = e^{i\,t}\ ,\ -\pi \leq t \leq \pi$), on a

$$\int_{\mathcal{C}} z\,dz = \int_{-\pi}^{+\pi} i\,e^{i\,2t}\,dt = 0\ ,\ \int_{\mathcal{C}} \Re z\,dz = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos t\ i\,e^{i\,t}\,dt = i\,\pi,$$

$$\int_{\mathcal{C}} |z|\,dz = \int_{-\pi}^{+\pi} i\,e^{i\,t}\,dt = 0 \ \text{ et } \ \int_{\mathcal{C}} \arg z\,dz = \int_{-\pi}^{+\pi} t\,i\,e^{i\,t}\,dt = 2\pi.$$

Pour la parabole d'équation $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$, on a

$$\int_{\mathcal{C}} z\,dz = \int_0^1 (t - 2t^3 + i\,3t^2)\,dt = i\ ,\ \int_{\mathcal{C}} \Re z\,dz = \int_0^1 (t + i\,2t^2)\,dt = \frac{1}{2} + i\,\frac{2}{3},$$

$$\int_{\mathcal{C}} |z|\,dz = \int_0^1 (t\sqrt{1+t^2} + i\,2t^2\sqrt{1+t^2})\,dt = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} + i\,\frac{3\sqrt{2} - \operatorname{arcsinh} 1}{4}$$

et

$$\int_{\mathcal{C}} \arg z\,dz = \int_0^1 (\arctan t + i\,2t\arctan t)\,dt = (\pi - \frac{1}{2}\ln 2) + i\,\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

3. Soient $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue réelle telle que $|f(z)| \leq 1$ et $\mathcal{C}$ le cercle unité parcouru dans le sens positif. Montrer que

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz \right| \leq 4.$$

Solution. Posons

$$I = \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz \right|$$

et

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = Ie^{i\,\gamma}.$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{i\,t})\, i\, e^{i\,(t-\gamma)}\, dt = \Re\left(\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{i\,t})\, i\, e^{i\,(t-\gamma)}\, dt\right) \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} -f(e^{i\,t})\, \sin(t-\gamma)\, dt \leq \int_{-\pi}^{+\pi} |\sin(t-\gamma)|\, dt = 4. \end{aligned}$$

4. Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine convexe et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f'(z)| \leq M$ dans D. Montrer que

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq M\,|z_2 - z_1| \quad \text{pour tout} \quad z_1, z_2 \in D.$$

Solution. Les hypothèses de convexité et d'holomorphie permettent d'écrire

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left|\int_{[z_1,z_2]} f'(z)\, dz\right| \leq M\,|z_2 - z_1|.$$

5. $\mathcal{C}$ désignant le cercle unité parcouru dans le sens positif, calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}\ ,\ n \in \mathbb{N}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n} t\, dt \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2n} t\, dt.$$

Obtenir aussi

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n+1} t\, dt \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2n+1} t\, dt.$$

Solution. En vertu du théorème du binôme et du théorème de Cauchy, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{\mathcal{C}} z^{2n-2k-1}\, dz = \binom{2n}{n} 2\pi i.$$

En paramétrant,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} 2^{2n} \cos^{2n} t\, i dt = \binom{2n}{n} 2\pi i$$

et

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n} t\,dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2n} t\,dt = \binom{2n}{n}\frac{2\pi}{2^{2n}}$$

puisque

$$\sin t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

En vertu de cette dernière remarque et du fait que $\sin^{2n+1} t$ est une fonction impaire,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n+1} t\,dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2n+1} t\,dt = 0.$$

6. $\mathcal{C}$ désignant le cercle unité parcouru dans le sens positif, calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}.$$

Solution. Décomposons en fractions partielles. On obtient

$$\frac{1}{2z^2 - 5z + 2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1/2}\right)$$

et en vertu du théorème et de la formule de Cauchy,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} = \frac{1}{3}\left(\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-2} - \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-1/2}\right) = -\frac{2\pi i}{3}.$$

7. Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\mathcal{C}$ un chemin fermé parcouru dans le sens positif et contenu ainsi que son intérieur dans D. Soient enfin z_1 et z_2 deux points à l'intérieur de $\mathcal{C}$. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Qu'obtient-on lorsque $z_1 \to z_2$?

Solution. Comme dans l'exercice précédent,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} &= \frac{1}{z_1 - z_2}\left(\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,dz}{z-z_1} - \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,dz}{z-z_2}\right) \\ &= 2\pi i\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}.\end{aligned}$$

Lorsque $z_1 \to z_2$, on obtient

$$2\pi i f'(z_2) = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_2)^2}.$$

8. $\mathcal{C}$ désignant le cercle unité parcouru dans le sens positif, calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin^6 z}{(z-\pi/6)^2}\ dz.$$

Solution. En vertu de la formule de Cauchy pour la dérivée,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin^6 z}{(z-\pi/6)^2}\ dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \sin^6 z\Big|_{z=\pi/6} = i\,\frac{3\sqrt{3}\pi}{16}.$$

9. Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\mathcal{C}$ un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D. Soit z_0 un point à l'intérieur de $\mathcal{C}$. Montrer que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{C}} \frac{f^{(n)}(z)}{(z-z_0)}\, dz\ ,\ n \in \mathbb{N}.$$

Solution. Appliquant la formule de Cauchy à la fonction $f^{(n)}$, on a

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f^{(n)}(z)}{(z-z_0)}\, dz.$$

Appliquant d'autre part la formule de Cauchy pour la $n^{ième}$ dérivée à la fonction f, on obtient

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Les deux intégrales sont donc égales à

$$\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

10. Soient $\varphi : \{z \mid |z| = 1\} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\mathcal{C}$ le cercle unité parcouru dans le sens positif. Montrer que

$$\overline{\int_{\mathcal{C}} \varphi(z)\, dz} = -\int_{\mathcal{C}} \overline{\varphi(z)}\, \frac{dz}{z^2}.$$

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine contenant $\overline{D}(0,1)$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Calculer

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}\, dz\ ,\ |z_0| \neq 1.$$

Solution. On a

$$\overline{\int_{\mathcal{C}} \varphi(z)\, dz} = \overline{\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(e^{i\,t})\, i\, e^{i\,t}\, dt} = \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{\varphi(e^{i\,t})}(-i)e^{-i\,t}\, dt$$
$$= -\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{\varphi(e^{i\,t})}\, \frac{i\, e^{i\,t}\, dt}{e^{i\,2t}} = -\int_{\mathcal{C}} \overline{\varphi(z)}\, \frac{dz}{z^2}.$$

Supposons maintenant f holomorphe et utilisons la relation $z\overline{z} = 1$. On obtient

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0}\, dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{\overline{f(z)}}{(1 - z_0\overline{z})\overline{z}}\, \frac{dz}{z^2} = -\overline{\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(1 - \overline{z}_0 z)z}\, dz}$$
$$= -\overline{\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z}\, dz} + \overline{\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - 1/\overline{z}_0}\, dz} = 2\pi i \overline{f(0)} + \overline{\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - 1/\overline{z}_0}\, dz}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0}\, dz = \begin{cases} \overline{f(0)} & \text{si } \ |z_0| < 1, \\ \overline{f(0)} - \overline{f(1/\overline{z}_0)} & \text{si } \ |z_0| > 1. \end{cases}$$

11. Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Supposons que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$$

pour toute chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D. Montrer que f est holomorphe dans D (théorème de Morera).

Solution. Soit $D(z_0, r) \subseteq D$ quelconque et montrons que f est holomorphe dans $D(z_0, r)$. Par hypothèse, la fonction $F : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

est bien définie. Vérifions qu'elle est holomorphe et que sa dérivée au point z est $f(z)$. Soit $r > 0$ tel que $D(z, r) \subseteq D(z_0, r)$ et, si $|h| < r$, intégrons du point z au point $z + h$ le long du segment $[z, z + h]$. On aura

$$\left| \frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta \right|$$
$$\leq \sup\{|f(\zeta) - f(z)| \mid \zeta \in [z, z + h]\}$$

ce qui tend vers 0 avec $|h|$. La fonction f, étant la dérivée d'une fonction holomorphe, est elle-même holomorphe.

12. Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f_n : D \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes convergeant uniformément sur toute partie compacte $E \subseteq D$ vers une fonction $f : D \to \mathbb{C}$. Montrer que f est holomorphe. En déduire que la fonction
$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^z}$$
est holomorphe dans le demi-plan $\Re z > 1$.
Solution. La fonction f est continue et, si $\mathcal{C}$ est chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D, on a, par convergence uniforme sur $\mathcal{C}$,
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathcal{C}} f_n(z)\, dz = 0.$$
En vertu du théorème de Morera, f est holomorphe. La fonction zeta de Riemann,
$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^z},$$
est holomorphe dans le demi-plan $\Re z > 1$ puisque que la série y converge uniformément sur toute partie compacte.

13. Calculer $\sqrt{2}^{\,i}$ et $i^{\sqrt{2}}$.
Solution. Puisque $z^p = e^{p \ln z}$ pour tout $z \neq 0$,
$$\sqrt{2}^{\,i} = e^{i\ \ln \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad i^{\sqrt{2}} = e^{i\, \pi/\sqrt{2}}.$$

14. Trouver l'erreur : $-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.
Solution. Puisque $\sqrt{a} = e^{1/2\ \ln a}$ pour tout $a \neq 0$,
$$\sqrt{-1} = e^{\pi/2} \quad \text{et} \quad \sqrt{-1}\sqrt{-1} = e^{\pi} = -1$$
alors que
$$\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$
C'est relation $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$ qui n'est pas valable car on a seulement
$$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2 \mod 2\pi i.$$

15. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z^z.
Solution. Puisque $z^z = e^{z \ln z}$ pour tout $z \neq 0$,
$$z^z = e^{(x+i\,y)(\ln|z|+i\ \arg z)}$$

et

$$\Re z^z = e^{x\ln|z|-y\arg z}\cos(x\arg z + y\ln|z|),$$
$$\Im z^z = e^{x\ln|z|-y\arg z}\sin(x\arg z + y\ln|z|).$$

Lorsque $z = x > 0$, on retrouve x^x et lorsque $z = x < 0$, on obtient

$$x^x = e^{x\ln(-x)}(\cos x\pi + i\,\sin x\pi).$$

En particulier, on a bien $(-1)^{(-1)} = -1$.

16. Montrer que l'on peut déterminer une fonction

$$\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

holomorphe dans le disque $D(0,1)$. Calculer au point $i/2$ la valeur de celle des deux déterminations possibles de la fonction qui est positive lorsque son argument l'est.

Solution. Le disque unité est un domaine simplement connexe et la fonction holomorphe

$$\frac{1-z}{1+z}$$

ne s'y annule pas. On peut donc choisir une détermination de la racine carrée de cette fonction dans ce domaine. Celle qui est positive lorsque son argument l'est est

$$\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = e^{(1/2)(\ln(|1-z|/|1+z|)+i\ \arg(1-z)/(1+z))}$$

l'autre étant

$$e^{(1/2)(\ln(|1-z|/|1+z|)+i\ \arg(1-z)/(1+z)+i\,2\pi)}$$
$$= -\,e^{(1/2)(\ln(|1-z|/|1+z|)+i\ \arg(1-z)/(1+z))}.$$

Puisque $(1-i/2)/(1+i/2) = (3+i\,4)/5$, on a

$$\sqrt{\frac{1-i/2}{1+i/2}} = e^{i\,(1/2)\arg(3+i\,4)/5} = e^{i\,(1/2)\arctan 4/3} = 0,894 + i\,0,447.$$

17. Déterminer un domaine où l'on puisse définir $\log\arctan z$ comme fonction holomorphe.

Solution. Il s'agit de déterminer un domaine simplement connexe où arctan est holomorphe et ne s'annule pas. Dans

$$D_1 = \mathbb{C} \setminus \, (]-i\infty, -i] \cup [i, +i\infty[\,),$$

on a, en intégrant le long de $[0, x] + [x, x + i\, y]$, que

$$\arctan z = \arctan x$$
$$+\frac{1}{2} \arctan \frac{2xy^2}{4x^2 + (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - 1)} + i\, \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + (1 + y)^2}{x^2 + (1 - y^2)}$$

ce qui montre que $z = 0$ est le seul point du domaine D_1 où arctan s'annule. On peut donc prendre pour domaine

$$D = \mathbb{C} \setminus \, (]-i\infty, -i] \cup [i, +i\infty[\cup]-\infty, 0]).$$

6 Propriétés analytiques des fonctions holomorphes

1. Soient $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$ des séries entières dont les rayons de convergence sont plus grands que ou égaux à r. Montrer que le rayon de convergence de la série produit,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} z^k,$$

est encore plus grand que ou égal à r.
Solution. Soient $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ et $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$. Ces fonctions étant holomorphes dans le disque $D(0, r)$, leur produit $f(z)g(z)$ l'est aussi et donc la série de Taylor de ce produit,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} z^k,$$

converge au moins pour $|z| < r$. Il est d'ailleurs possible que le rayon de la série produit soit strictement plus grand : $f(z) = 1 - z$ et $g(z) = 1/(1 - z)$.

2. Calculer explicitement les trois premiers termes de la série de Taylor à l'origine de la fonction

$$f(z) = e^{z/(1-z)}.$$

Quel est le rayon de convergence ?
Solution. On a

$$e^{z/(1-z)} = 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{(1-z)^2} + \frac{1}{6}\frac{z^3}{(1-z)^3} + \cdots$$
$$= 1 + z(1+z+z^2+\cdots) + \frac{1}{2}z^2(1+2z+\cdots) + \frac{1}{6}z^3(1+\cdots) + \cdots$$
$$= 1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \cdots$$

Le rayon de convergence est égal à 1 car la fonction développée est holomorphe dans le disque unité.

3. Soit
$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{1}{2!}B_2 z^2 + \frac{1}{3!}B_3 z^3 + \cdots$$
Quel est le rayon de convergence de la série ? Calculer explicitement les trois premiers nombres de Bernoulli, B_1, B_2 et B_3.
Solution. La fonction $z/(e^z - 1)$ est holomorphe à l'origine car
$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + z/2 + z^2/6 + z^3/24 + \cdots},$$
la série au dénominateur convergeant pour tout $z \in \mathbb{C}$. Elle cesse d'être holomorphe au « premier » zéro non nul de $e^z - 1$, c'est-à-dire lorsque $z = \pm 2\pi i$. Le rayon de convergence pour la série cherchée est donc 2π. Si $|z| < 2\pi$, la relation
$$1 = \left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{24}z^3 + \cdots\right)\left(1 + B_1 z + \frac{1}{2!}B_2 z^2 + \frac{1}{3!}B_3 z^3 + \cdots\right)$$
implique
$$0 = \left(\frac{1}{2} + B_1\right)\ ,\ 0 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}B_1 + B_2\right) \text{ et } 0 = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6}B_1 + \frac{1}{2}B_2 + B_3\right)$$
d'où
$$B_1 = -\frac{1}{2}\ ,\ B_2 = \frac{1}{12} \text{ et } B_3 = 0.$$

4. Soient $0 < a < b$, $z_0 \in \mathbb{C}$ quelconque (mais différent de a et b) et
$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}.$$

Développer la fonction f suivant les puissances entières de $z-z_0$. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?
Solution. La série sera convergente pour $|z-z_0| < \inf\{|a-z_0|, |b-z_0|\}$.
On aura

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{(a-z_0)(b-z_0)} \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{a-z_0}} \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{b-z_0}}$$

$$= \frac{1}{(a-z_0)(b-z_0)} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{a-z_0}\right)^k \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{b-z_0}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(a-z_0)(b-z_0)} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{a-z_0}\right)^j \left(\frac{1}{b-z_0}\right)^{k-j} (z-z_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{(b-z_0)^{k+1}} - \frac{1}{(a-z_0)^{k+1}}\right) (z-z_0)^k.$$

5. Soit f une fonction entière satisfaisant une inégalité du type

$$|f(z)| \leq M\,|z|^n \ , \ M > 0 \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ z \in \mathbb{C}.$$

   Montrer que f est un polynôme.
   Solution. Soit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \ , \ z \in \mathbb{C}.$$

   On a, pour tout $k > n$,

$$|a_k| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{i\,t})e^{-i\,kt}\,dt\right| \leq \frac{Mr^{n-k}}{2\pi} \to 0$$

   lorsque $r \to +\infty$ et f est un polynôme de degré au plus n.
6. Soit f une fonction entière telle qu'il existe trois nombres réels non tous nuls, a, b et c tels que

$$a\Re f(z) + b\Im f(z) \leq c \ , \ z \in \mathbb{C}.$$

   Montrer que f est constante.
   Solution. Posons $\alpha = a - i\,b$ et considérons la fonction entière

$$e^{\alpha f(z)}.$$

   Son module étant borné (par e^c), elle doit être constante.

7. Déduire le théorème fondamental de l'algèbre du théorème de Liouville sur les fonctions entières bornées.

   Solution. Si le polynôme p ne s'annulait pas, la fonction
$$\frac{1}{p(z)}$$
   serait entière et bornée, donc constante et p serait un polynôme de degré un.

8. Déterminer l'ordre de tous les zéros des fonctions suivantes :
   - $1 - \cos z$;
   - $z \sin z$;
   - $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$.

   Solution. Les zéros de $1-\cos z$ sont les points $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ et ces points sont aussi des zéros de la dérivée $\sin z$, donc des zéros doubles.

   Les zéros de $z \sin z$ sont les points $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ et, sauf $z = 0$, ces points ne sont pas des zéros de la dérivée $\sin z + z \cos z$ — donc zéros simples si $k \neq 0$ et double si $k = 0$ (car la deuxième dérivée $2 \cos z - z \sin z$ ne s'annule pas à l'origine).

   Les zéros de $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$ sont les points $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ et les points ± 2. Les points $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ sont des zéros simples et comme
$$(1 - e^z)(z^2 - 4)^3 = (1 - e^z)(z - 2)^3(z + 2)^3$$
   les points ± 2 sont des zéros triples.

9. Déterminer toutes les fonctions entières telles que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

   Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, la fonction $f(z) = cz^n$ satisfait la relation.

   Réciproquement si $|f(z)| = 1$ lorsque $|z| = 1$ soit $n \in \mathbb{N}_0$ l'ordre du zéro de f à l'origine. La fonction
$$g(z) = f(z)/z^n$$
   est entière, donc la fonction
$$h(z) = \overline{g\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$
   est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et l'on a
$$g(z)h(z) = 1 \quad \text{sur} \quad |z| = 1.$$

Par prolongement analytique, on a $g(z)h(z) = 1$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. On en déduit que la fonction g ne s'annule jamais,

$$g(z) = e^{k(z)} \ , \ k(z) \text{ entière },$$

que la fonction h est entière donc constante et que la fonction $k(z)$ se réduit à une constante purement imaginaire, $k(z) = i\,k$. Finalement,

$$f(z) = z^n e^{i\,k}.$$

10. Montrer que

$$\sup_{|z|\leq 1} \left| \frac{\sin z}{z} \right| \leq \sinh 1.$$

Solution. Lorsque $|z| = 1$,

$$|\sin z| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = \sinh 1$$

(avec égalité au point $z = i$). En vertu du lemme de Schwarz,

$$|\sin z| \leq \sinh 1\,|z|.$$

11. Un polygone régulier est inscrit dans le cercle unité et un point du disque unité est joint à ses sommets par des droites. Déterminer un point pour lequel le produit des longueurs de ces droites est maximum et la valeur du produit maximum.

Solution. Soient ${\omega_n}^k$, $0 \leq k \leq n-1$, les sommets du polygone et posons

$$p(z) = z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_n^k).$$

Alors le produit des longueurs est $|p(z)|$ et le maximum est atteint lorsque $z^n = -1$ et il vaut 2.

7 Le calcul des résidus

1. Obtenir les séries de Laurent au point 1 des fonctions

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}.$$

Solution. Pour la fonction $e^z/(z-1)^2 = e\, e^{(z-1)}/(z-1)^2$, on a

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \sum_{k=-2}^{+\infty} \frac{e}{(k+2)!}\ (z-1)^k.$$

Pour la fonction $z^2/(z-1)(z-2) = (z-1+1)^2/(z-1)(-1+z-1)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{(z-1)(z-2)} &= -\frac{(z-1)^2+2(z-1)+1}{z-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(z-1)^k \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty}(z-1)^k - 2\sum_{k=0}^{+\infty}(z-1)^k - \sum_{k=-1}^{+\infty}(z-1)^k \\ &= \frac{-1}{z-1} - 3 - 4\sum_{k=1}^{+\infty}(z-1)^k.\end{aligned}$$

2. Obtenir la série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}\ ,\ 0 < |a| < |b|$$

dans le disque pointé $0 < |z-a| < |b|-|a|$.
Solution. On a

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{a-b}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}} = -\sum_{k=-1}^{+\infty}\frac{1}{(b-a)^{k+2}}\,(z-a)^k.$$

3. Les fonctions de Bessel de première espèce J_k satisfont la relation

$$e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z) w^k\ ,\ w \neq 0.$$

En déduire que

$$J_k(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin t - kt)\, dt.$$

Solution. Le développement de Laurent est unique : si

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k\ ,\ r < |z-z_0| < R,$$

la série converge uniformément sur tout cercle $r < |z - z_0| = \rho < R$ et on a nécessairement

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz,$$

C_ρ désignant le cercle de centre z_0 et de rayon ρ parcouru dans le sens positif. Donc, de la relation

$$e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z)w^k \ , \ w \neq 0,$$

on tire

$$J_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}}{z^{k+1}}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\,(z\sin t - kt)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin t - kt)\,dt.$$

Lorsque $k = 0$, on retrouve

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2k} t\,dt$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(z/2)^{2k}}{k!^2}.$$

4. Classifier les singularités des fonctions

$$\frac{1}{e^z-1}\ ,\ \frac{z}{(2\sin z - 1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{z^3}{e^{1/z}-1}.$$

Solution. Pour la fonction $1/(e^z - 1)$, on a $e^z - 1 = 0$ si et seulement si $z = i\,2k\pi = z_k, k \in \mathbb{Z}$ et, comme la dérivée e^z ne s'annule pas en z_k, chaque z_k est un pôle simple.
Pour la fonction $z/(2\sin z - 1)^2$, on a $2\sin z - 1 = 0$ si et seulement si $z = \pi/6 + 2k\pi = z_k, k \in \mathbb{Z}$ et $2\cos z_k \neq 0$. Les nombres z_k sont donc des zéros doubles pour $(2\sin z - 1)^2$, c'est-à-dire des pôles doubles pour $z/(2\sin z - 1)^2$.
Quant à la fonction $z^3/(e^{1/z} - 1)$, les zéros du dénominateur $e^{1/z} - 1$ sont les points $z_k = 1/i\,2k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ et la dérivée $-e^{1/z}/z^2$ ne s'y

annule pas. Ces points sont donc des pôles simples. L'origine, limite de ces points, n'est pas une singularité isolée de la fonction. On a quand même un développement de Laurent faisant intervenir les nombres de Bernoulli lorsque $|z| > 1/2\pi$:

$$\frac{z}{e^{1/z}-1} = z^4\left(1+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{2!z^2}+\frac{B_3}{3!z^3}+\cdots\right).$$

5. Déterminer le résidu de la fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+1)}$$

à chacun de ses pôles.

Solution. La fonction admet un pôle simple en -1 et un double en 1. D'où

$$\text{Rés}(f,-1) = \lim_{z\to-1}(z+1)f(z) = \frac{-1}{4}$$

et

$$\text{Rés}(f,1) = \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}(z-1)^2f(z)\Big|_{z=1} = \frac{1}{4}.$$

6. Soient f et g deux fonctions holomorphes en z_0 et $h(z) = f(z)/g(z)$. Supposons que g admette un zéro simple en z_0. Calculer

$$\text{Rés}(h,z_0).$$

Solution. Posant

$$g(z) = (z-z_0)g_1(z)\ ,\ g_1(z_0) = g'(z_0) \neq 0,$$

on a

$$h(z) = \frac{1}{z-z_0}\left(\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}+\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g_1(z)}\Big|_{z=z_0}(z-z_0)+\cdots\right)$$

et

$$\text{Rés}(h,z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

7. Soient p un polynôme et $\mathcal{C}$ un chemin fermé contenant tous ses zéros dans son intérieur. Calculer

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} z\frac{p'(z)}{p(z)}\,dz.$$

Solution. Si

$$p(z) = (z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_k)^{n_k},$$

on a

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{z - z_j}$$

et, en vertu du théorème des résidus ou de la formule de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{k} n_j z_j.$$

8. Soient f une fonction entière, $\omega(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ un polynôme ayant tous ses zéros distincts et $\mathcal{C}$ un chemin fermé les contenant tous dans son intérieur. Montrer que

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

est un polynôme de degré $n - 1$ qui coïncide avec f aux zéros de ω.

Solution. En vertu du théorème des résidus et de la formule d'interpolation de Lagrange,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z}\, d\zeta &= \sum_{k=1}^{n} \text{Rés}\left(\frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z}, z_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lim_{\zeta \to z_k} f(\zeta) \frac{\zeta - z_k}{\omega(\zeta)} \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z} \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \frac{1}{\omega'(z_k)} \frac{\omega(z) - \omega(z_k)}{z - z_k}
\end{aligned}$$

est l'unique polynôme de degré $n - 1$ ayant la propriété requise.

9. Déterminer toutes les fonctions holomorphes réelles.

   Solution. En vertu de la propriété de l'application ouverte, les constantes.

10. Déterminer toutes les fonctions holomorphes de module constant.

    Solution. En vertu de la propriété de l'application ouverte, les constantes.

11. Montrer que, si $a > e$, l'équation $az^n = e^z$ admet n racines dans le disque unité. Montrer que ce disque n'en contient aucune si $ae < 1$.

Solution. Si $a > e$, posant $f(z) = -az^n + e^z$ et $g(z) = az^n$, on a

$$|f(z) + g(z)| = |e^z| \leq e < a \leq |az^n| + |-az^n + e^z| = |f(z)| + |g(z)|$$

sur le cercle $|z| = 1$ donc f et g ont autant de zéros dans $D(0,1)$, c'est-à-dire n. Si $ae < 1$ et $|z| < 1$, $|az^n| < a < 1/e < |e^z|$.

12. Démontrer : Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $H, h : D \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes dans D. Soit $\mathcal{C}$ est un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D. Si

$$|h(z)| < |H(z)| \ , \ z \in \mathcal{C},$$

alors H et $H + h$ ont le même nombre de zéros dans l'intérieur de $\mathcal{C}$.

Solution. L'hypothèse implique évidemment

$$|h(z)| < |H(z)| + |H(z) + h(z)| \text{ sur } \mathcal{C}$$

et il suffit d'appliquer le théorème de Rouché aux fonctions $f(z) = -H(z)$ et $g(z) = H(z) + h(z)$. Cette forme du théorème est souvent plus aisée à appliquer.

13. Montrer que les zéros du polynôme $1 + 3z^m + 5z^n$ $(1 < m < n)$ sont tous situés dans la couronne $1/3 < |z| < 1$.

Solution. Si $|z| = 1$, soient $H(z) = 5z^n$, $h(z) = 1 + 3z^m$. Alors

$$|h(z)| \leq 4 < 5 = |H(z)|.$$

Si $|z| = 1/3$, soient $H(z) = 1 + 3z^m$ et $h(z) = 5z^n$. Alors

$$|h(z)| = \frac{5}{3^n} < \frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{3^{m-1}} \leq |H(z)|.$$

(H ne s'annule pas dans le disque $D(0, 1/3)$).

14. Utiliser le calcul des résidus pour calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}.$$

Solution. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{(1+x^2)^2}\, dx$$
$$= 2\pi i \operatorname{Rés}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{(1+z^2)^2}, i\right) = \frac{\pi}{2}(1 + |\xi|)e^{-|\xi|}.$$

15. Montrer par le calcul des résidus que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta = 2\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)$$

lorsque $a > 1$.
Solution. On a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta = 2\pi\,\text{Rés}\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+2i\,az-1)},0\right)$$
$$+2\pi\,\text{Rés}\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+2i\,az-1)},i\,(-a+\sqrt{a^2-1})\right)$$
$$= 2\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)$$

16. Évaluer par le calcul des résidus

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}\ ,\ a^2 > b^2+c^2.$$

Solution. On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}$$
$$= \text{Rés}\left(\frac{2i}{(c+i\,b)z^2+2i\,az-(c-i\,b)},i\,(a+\sqrt{a^2-b^2-c^2})\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}.$$

17. Montrer par le calcul des résidus que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi/n}{\sin 2\pi/n}\ ,\ n > 2.$$

Solution. Si $A > 1$, on a (figure 4, page 35)

$$\int_{\mathcal{C}_A} \frac{z\,dz}{1+z^n} = 2\pi i\ \text{Rés}\left(\frac{z}{1+z^n},e^{i\,\pi/n}\right).$$

D'où

$$\int_0^A \frac{x\,dx}{1+x^n} + \int_0^{2\pi/n} \frac{i\,A^2e^{i2t}}{1+A^ne^{i\,nt}}\,dt - \int_0^A \frac{xe^{i\,4\pi/n}}{1+x^n}\,dt = -\frac{2\pi i}{n}\,e^{i\,2\pi/n}.$$

Lorsque $A \to +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x(1-e^{i\,4\pi/n})}{1+x^n}\,dx = -\frac{2\pi i}{n}\,e^{i\,2\pi/n}$$

car

$$\left|\int_0^{2\pi/n} \frac{i\,A^2 e^{i2t}}{1+A^n e^{i\,nt}}\,dt\right| \le \int_0^{2\pi/n} \frac{A^2}{A^n-1}\,dt \to 0.$$

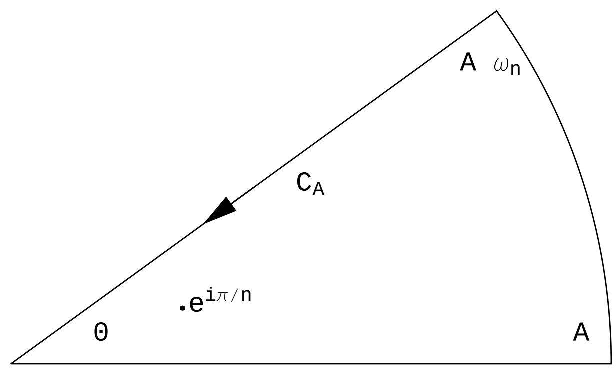

FIG. 4 –

18. Évaluer par le calcul des résidus

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)}\ ,\ 0<p<1.$$

Solution. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)} = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi ip}} \sum_{z_k} \text{Rés}\left(\frac{1}{z^p(1+z^2)}, z_k\right)$$

(où $z^p = |z|^p e^{i\,p\,\theta}$ avec $0 \le \theta < 2\pi$). Donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)} \\
&= \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi ip}}\left(\text{Rés}\left(\frac{1}{z^p(z^2+1)}, i\right) + \text{Rés}\left(\frac{1}{z^p(z^2+1)}, -i\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{1-e^{-2\pi ip}}(e^{-i\,p\pi/2} - e^{-i\,3p\pi/2}) = \frac{\pi}{2\cos p\pi/2}.
\end{aligned}$$

19. Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x}\,dx \ , \ 0<p<1.$$
Solution. Il suffit de faire le changement de variable $y = e^{-x}$ pour obtenir
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^p(1+y)} = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

8 Propriétés géométriques des fonctions holomorphes

1. Soit $w = \cos z$. Déterminer l'image des courbes $x = cste$ et $y = cste$ sous cette transformation. Vérifier que ces images se coupent à angle droit lorsque $z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Solution. Si $u + i\,v = \cos(x + i\,y)$,
$$\frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i\ \sin y) + e^{y}(\cos x - i\ \sin y)) = \cos x \cosh y - i\ \sin x \sinh y$$
et
$$u = \cos x \cosh y \ , \ v = \sin x \sinh y.$$
Si $y \neq 0$ et $x \neq k\pi/2, k \in \mathbb{Z}$, on a donc
$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = 1,$$
$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$$
et les images des courbes $x = cste$ et $y = cste$ sont des hyperboles et des ellipses respectivement. Ces courbes peuvent être paramétrées par
$$w_1(t) = \cos x \cosh(t+y) - i\ \sin x \sinh(t+y)$$
et
$$w_2(t) = \cos(t+x)\cosh y - i\ \sin(t+x)\sinh y.$$
Lorsqu'elles se coupent, $t = 0$ et
$$\Re w_1'(0)\overline{w_2'(0)} = -\cos x \sinh y \sin x \cosh y + \sin x \cosh y \cos x \sinh y = 0.$$

2. Vérifier que les transformations homographiques de la forme

$$w = k\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad \text{où} \quad |a|<1\ ,\ |k|=1,$$

forment un groupe.
Solution. Un calcul montre que

$$k_2\,\frac{k_1\,\dfrac{z-a_1}{1-\overline{a_1}z}-a_2}{1-\overline{a_2}\,k_1\,\dfrac{z-a_1}{1-\overline{a_1}z}} = k\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

où

$$k = k_1k_2\,\frac{\overline{1+k_1a_1\overline{a_2}}}{1+k_1a_1\overline{a_2}} \quad \text{et} \quad a = \overline{k_1}\,\frac{a_2+k_1a_1}{1+\overline{k_1a_1}a_2}$$

et que la solution de

$$w = k\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

est

$$z = \overline{k}\frac{w+ka}{1+\overline{ka}w}.$$

Si $|a|<1$, on a $|z-a| = |1-\overline{a}z|$ sur le cercle unité et, en vertu du principe du maximum, $|z-a|<|1-\overline{a}z|$ dans le disque unité. On en déduit que si $|A|<1$ et $|B|<1$, on a

$$\left|\frac{A+B}{1+\overline{B}A}\right|<1$$

ce qui complète le raisonnement.

3. Déterminer l'image du disque unité $D(0,1)$ sous la transformation homographique

$$w = \frac{z}{1-z}.$$

Solution. Lorsque $z = i, -1$ et $-i$,

$$w = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\ ,\ -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}-\frac{i}{2}.$$

Le cercle est donc appliqué sur la droite $\Re w = -1/2$ et, puisque $w = 0$ lorsque $z = 0$, le disque est appliqué sur le demi-plan $\Re w > -1/2$.

4. Représenter conformément le disque unité $D(0,1)$ sur le demi-plan $\Im w > 0$ de telle sorte que trois points donnés $e^{i\,\alpha}, e^{i\,\beta}, e^{i\,\gamma}$ où $0 < \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$ soient appliqués sur trois points $0 < a < b < c$ donnés.

   Solution. Utilisant les rapports anharmoniques, on a
$$\frac{(e^{i\alpha} - e^{i\beta})(e^{i\gamma} - w)}{(e^{i\alpha} - w)(e^{i\gamma} - e^{i\beta})} = \frac{(a-b)(c-z)}{(a-z)(c-b)}$$
   de telle sorte que
$$w = \frac{(e^{i\gamma} - Ke^{i\alpha})z + (Kce^{i\alpha} - ae^{i\gamma})}{(1-K)z + (Kc - a)}$$
   en posant
$$K = \frac{(e^{i\gamma} - e^{i\beta})(a-b)}{(e^{i\alpha} - e^{i\beta})(c-b)}.$$

5. Déterminer une transformation homographique qui applique $1, i, -1$ sur $0, 1, \infty$. Quelle est l'image du disque unité $D(0,1)$ sous cette transformation ?

   Solution. Le zéro de la fonction étant en $z = 1$ et son pôle en $z = -1$, elle doit être de la forme
$$w = K\frac{z-1}{z+1}.$$
   La condition
$$1 = K\frac{i-1}{i+1}$$
   détermine K :
$$w = -i\frac{z-1}{z+1}.$$
   La transformation applique 0 sur i donc $D(0,1)$ sur le demi-plan supérieur.

6. Représenter conformément le disque unité $D(0,1)$ sur le demi-plan $\Re w + \Im w > 1$.

   Solution. Appliquant les points $1, i$ et -1 sur $i, (1+i)/2$ et 1, on a
$$\frac{(i-(1+i)/2)(1-w)}{(i-w)(1-(1+i)/2)} = \frac{(1-i)(-1-z)}{(1-z)(-1-i)}$$
   ce qui conduit à
$$w = \frac{-2}{(1+i)z - (1-i)}.$$

7. Déterminer le symétrique z^* d'un point z par rapport à un cercle $|z - z_0| = r$.
Solution. Dans la relation

$$[z_1, z_2, z_3, z^*] = \overline{[z_1, z_2, z_3, z]},$$

choisissons $z_1 = z_0 + r, z_2 = z_0 + i\,r$ et $z_3 = z_0 - r$. On obtient

$$z^* = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}$$

(si $z \neq z_0$ et ∞ si $z = z_0$).

8. Déterminer la forme générale des transformations homographiques appliquant le disque $D(z_0, r)$ sur le disque $D(0, 1)$.
Solution. Soit $a \in D(z_0, r)$ le point appliqué sur 0. Si $a \neq z_0$,

$$w = K \frac{z - a}{z - a^*}$$

où

$$a^* = z_0 + \frac{r^2}{\overline{a - z_0}}$$

et

$$K = w_0 \frac{z_0 - a^*}{z_0 - a} \ , \ |w_0| < 1$$

et si $a = z_0$,

$$w = K(z - z_0)$$

où

$$|K| = \frac{1}{r}.$$

9. Soit $|z_0| < 1$. Déterminer une transformation homographique T du disque unité sur lui-même telle que $T(z_0) = 0$ et $T'(z_0) > 0$.
Solution. On a

$$T(z) = K \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \ , \ |K| = 1.$$

Donc

$$T'(z) = K \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \overline{z_0} z)^2}$$

et

$$T'(z_0) = K = 1.$$

10. Montrer que la transformation homographique la plus générale qui applique le demi-plan $\Re z > 0$ sur le disque unité $D(0,1)$ est

$$w = k\,\frac{z-a}{z-\overline{a}} \quad \text{où} \quad \Re a > 0\ ,\ |k| = 1.$$

Quelle est la transformation inverse ?
Solution. Si a est le point appliqué sur 0,

$$w = k\frac{z-a}{z-\overline{a}}.$$

Lorsque z est réel, $|w| = |k| = 1$. La transformation inverse est

$$z = \frac{\overline{a}w - ak}{w-k}.$$

11. Soit $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f(z)| < 1$. Montrer que, quels que soient z_1, z_2, on a

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| < 1.$$

Solution. Fixons arbitrairement $z_1 \in D(0,1)$ et considérons la fonction

$$g(z) = \frac{f(z)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}f(z)}.$$

Elle est holomorphe dans le disque unité y satisfait l'inégalité $|g(z)| < 1$.

12. Soit $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f(z)| < 1$. Montrer que

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right| \leq |z|.$$

Que devient cette inégalité lorsque $z \to 0$?
Solution. La fonction

$$g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}$$

est holomorphe dans le disque unité, y satisfait l'inégalité $|g(z)| < 1$ et s'annule à l'origine. En vertu du lemme de Schwarz, elle y satisfait la relation

$$|g(z)| \leq |z|,$$

l'égalité n'ayant lieu que si

$$f(z) = \frac{kz^n - w_0}{1 - \overline{w_0}kz^n} \ , \ |w_0| < 1, |k| = 1.$$

En la réécrivant sous la forme

$$\left|\frac{f(z) - f(0)}{z}\right| \leq |1 - \overline{f(0)}f(z)|,$$

on voit que la relation implique

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2.$$

13. Représenter conformément le disque unité $D(0,1)$ sur le premier quadrant $\Re w > 0, \Im w > 0$.

    Solution. La transformation homographique $\zeta = (1-z)/(1+z)$ applique le disque sur le demi-plan droit et la transformation $w = e^{i\,\pi/4}\sqrt{w}$ applique le demi-plan droit sur le premier quadrant. D'où la transformation cherchée

    $$w = e^{i\,\pi/4}\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

14. Représenter conformément le demi-plan $\Im z < 0$ sur la bande $a < \Im w < b$.

    Solution. La fonction $\zeta = -z$ applique le demi-plan gauche sur le demi-plan droit. La fonction $\omega = \log\zeta$ applique le demi-plan droit sur la bande $-\pi/2 < \Im\omega < \pi/2$ et la fonction $w = (b-a)/\pi\,\omega + i\,(b+a)/2$ applique cette bande sur la bande $a < \Im w < b$. D'où la transformation cherchée

    $$w = \frac{b-a}{\pi}\log(-z) + \frac{b+a}{2}.$$

15. Représenter conformément le disque unité $D(0,1)$ sur $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 1/4]$.

    Solution. La fonction $\omega = w-/4$ applique $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 1/4]$ sur $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 0]$, la fonction $\zeta = \sqrt{\omega}$ applique $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 0]$ sur le demi-plan droit et la fonction $z = (1-\zeta)(1+\zeta)$ applique le demi-plan droit sur le disque unité (cette fonction est sa propre inverse). La fonction

    $$z = \frac{1 - \sqrt{w - 1/4}}{1 + \sqrt{w - 1/4}}$$

    applique donc $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 1/4]$ sur le disque unité. Une transformation possible est donc son inverse

    $$w = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

9 Fonctions harmoniques

1. Soient $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique réelle et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une deuxième dérivée continue. Sous quelles conditions la fonction composée $\phi \circ u$ est-elle harmonique ?

   Solution. On a
$$\frac{\partial \phi(u(x,y))}{\partial x} = \phi'(u(x,y))\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 \phi(u(x,y))}{\partial x^2} = \phi''(u(x,y))\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \phi'(u(x,y))\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}$$
   de telle sorte que
$$\frac{\partial^2 \phi(u(x,y))}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi(u(x,y))}{\partial y^2} = \phi''(u(x,y))\left(\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)^2\right).$$
   Pour que la fonction composée $\phi \circ u$ soit harmonique, il est donc nécessaire et suffisant que l'une au moins des fonctions soit linéaire, $\phi(u) = Au + B$ ou $u(x,y) = ax + by + c$.

2. Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que la fonction
$$u(z) = f(\overline{z})$$
   est harmonique dans D.

   Solution. On a
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x - i\,y) - f(x - i\,y)}{\Delta x} = f'(x - i\,y) = f'(\overline{z})$$
   et
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x - i\,y - i\,\Delta y) - f(x - i\,y)}{\Delta y} = -i\,f'(x - i\,y) = -i\,f'(\overline{z}).$$
   Ainsi
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f''(\overline{z}) - f''(\overline{z}) = 0.$$

3. Sous quelles conditions le polynôme
$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$
   est-il harmonique ?

Solution. On a

$$u_{xx} + u_{yy} = (6a + 2c)x + (2d + 6d)y.$$

Le polynôme u est donc harmonique si et seulement si il est de la forme

$$u(x, y) = a(x^3 - 3xy^2) - d(3x^2y - y^3)$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$u(x, y) = a\Re z^3 - d\Im z^3 = \Re((a + i\,d)z^3).$$

4. Déterminer une fonction entière dont $u(x, y) = xy$ est la partie réelle.
   Solution. Si v est une fonction harmonique conjuguée pour u, on doit avoir

   $$v_y = u_x = y \ \text{ et } \ v_x = -u_y = -x.$$

   La première relation entraîne

   $$v(x, y) = \frac{y^2}{2} + \phi(x)$$

   et la deuxième,

   $$\phi'(x) = -x$$

   d'où

   $$v(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} + c\ ,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

   Ainsi on peut prendre

   $$f(z) = -i\,\frac{z^2}{2}.$$

5. Déterminer une fonction entière dont $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ est la partie réelle.
   Solution. Si v est une fonction harmonique conjuguée pour u,

   $$v = \int v_y\,dy + \phi(x) = \int u_x\,dy + \phi(x) = 3x^2y - y^3 + \phi(x)$$

   et

   $$v_x = 6xy + \phi'(x) = -u_y = 6xy - 2$$

   de telle sorte que

   $$\phi(x) = -2x + c\ ,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

et

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2x + c.$$

La fonction entière la plus générale dont u est la partie réelle est donc

$$f(z) = z^3 - 2i\,z + i\,c\ ,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

6. Soit f une fonction entière. Vérifier que la fonction $\phi(z) = \ln|f(z)|$ satisfait l'équation de Laplace.

   Solution. La fonction ϕ est définie sur le domaine D consistant du plan complexe amputé des zéros de f. Si z_0 est un point de ce domaine, la fonction ϕ est harmonique dans un disque ouvert centré en z_0 parce qu'elle y est la partie réelle d'une fonction holomorphe, nommément, une détermination de $\log f(z)$ dans ce disque.

7. Soit f une fonction entière. Vérifier que

$$\frac{\partial^2|f|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2|f|^2}{\partial y^2} = 4|f'|^2.$$

   Solution. On a $(f = u + i\,v)$, u et v étant harmoniques,

$$\frac{\partial^2|f|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2|f|^2}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2uu_x + 2vv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(2uu_y + 2vv_y) = 2(u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2) = 4|f'|^2.$$

8. Évaluer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2r\cos t + r^2}\ ,\ \ 0 < r < 1.$$

   Solution. En appliquant la formule de Poisson à la fonction $U(t) = 1$, on obtient

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\,dt.$$

   D'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2r\cos t + r^2} = \frac{2\pi}{1 - r^2}.$$

   (Cette intégrale peut bien sûr aussi être évaluée au moyen du calcul des résidus).

9. Évaluer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nt\, dt}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2}\ , 0 < r < R.$$

Solution. En appliquant la formule de Poisson à la fonction $U(t) = \sin nt$, on obtient

$$r^n \sin n\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - r^2)\sin nt}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\, dt.$$

D'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nt\, dt}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2} = \frac{2\pi r^n \sin n\theta}{1 - r^2}.$$