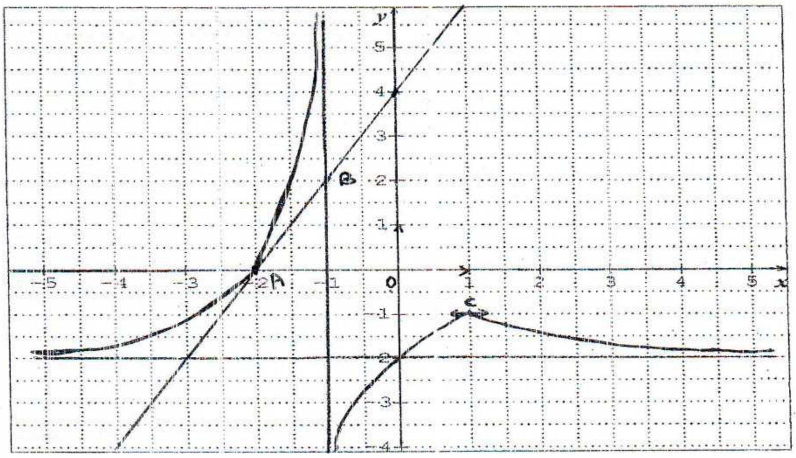
شعبـــة : علوم تجريبية **3ASS**

إختبار تجريبي للفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول :

في الشكل التالي لدينا التمثيل البياني (C) في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

(T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة c ، (AB) مماس المنحنى (C) عند النقطة A.



1) حدد القيم التالية: $f'(-2), f'(1), f(1), f(0), f(-2)$.

2) أحسب نهايات الدالة عند حدود مجموعة تعريفها ثم استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) .

3) عين إشارة الدالة f على $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

- نعتبر الدالة g المعرفة على $R-\{-1\}$ كما يلي: $g(x)=|f(x)|$.

1) أكتب (x) دون رمز القيمة المطلقة حسب قيم x من D_g .

2) أحسب $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -2}}\left(\frac{g(x)}{x+2}\right)$; $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -2}}\left(\frac{g(x)}{x+2}\right)$. ماذا تستنتج؟ فسر هندسيا إجابتك.

3) اشرح كيفية رسم المنحنى (C_g) التمثيل البياني لدالة g انطلاقا من المنحنى (C) ثم ارسم منحناها في المعلم السابق.

التمرين الثاني :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

<u>الجزء 01</u>: h دالة معرفة على $]0,+\infty[$ب: $h(x)=\ln(x^2+1)-\frac{2x^2}{x^2+1}$

1) أدرس تغيرات الدالة h .

2) شكل جدول تغيرات الدالة h .

3) بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\propto$ حيث: $1.9<\propto<2$

4) استنتج إشارة الدالة h في المجال $]0,+\infty[$.

<u>الجزء 02</u>: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x} \quad ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)$ ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f .

2) *أكتب معادلة المماس* (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

3) *أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي* x من $]0,+\infty[$: $f(x)=\frac{2lnx}{x}+ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{-h(x)}{x^2}$. ثم أعطي جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن $f(\propto)=\frac{2\propto}{\propto^2+1}$ ثم عين حصرا $f(\propto)$.

6) أرسم (C_f) و (Δ) في المعلم السابق.

<u>**التمرين الثالث:**</u>

f' هي الدالة المشتقة للدالة f قابلة للإشتقاق على R وتحقق الشروط الثلاثة التالية:

1) من أجل كل عدد حقيقي x, $(f'(x))^2-(f(x))^2=1$.

2) $f'(0)=1$.

3) الدالة f' قابلة للإشتقاق على R .

.1 أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $f'(x)\neq 0$.

ب- أحسب$f(0)$

.2 باشتقاق طرفي المساواة في الشرط(1). بين أنه من أجل كل عدد حقيقي : $f''(x)=f(x)$.

.3 نضع: $u=f'+f, \quad v=f'-f$.

أ- أحسب $u(0),v(0)$

ب- أثبت أن: $v'=-v,\ \ u'=u$

ت- استنتج عبارة كل من الدالتين: u و v

.4 استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

التمرين الاول:

I-

1) $f(1) = -1,\ f(0) = -2,\ f(-2) = 0$. $f'(1)$ هو ميل المماس عند $x_0 = 1$, $f'(1) = 0$

$f'(-2)$ هو ميل المماس عند النقطة A ذات الفاصلة (-2) $f'(-2) = \frac{2-0}{-1-(-2)} = 2$.

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2,\quad \lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$

3)

	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+ ||	-

II- 1)

$$\begin{cases} g(x) = f(x)\ ;\ x \in [-2, -1[\\ g(x) = -f(x)\ ;\ x \in]-\infty, -2] \cup]-1, +\infty] \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -2} \left(\frac{g(x)}{x+2}\right) = \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \left(\frac{-f(x)}{x+2}\right) = -\lim_{x \overset{<}{\to} -2} \left(\frac{f(x)}{x+2}\right) = -f'(-2) = -2$$

$$\lim_{n \overset{>}{\to} -2} \left(\frac{g(x)}{x+2}\right) = \lim_{n \overset{>}{\to} -2} \left(\frac{f(x)}{x+2}\right) = f'(-2) = 2$$

الإستنتاج: الدالة g ليست قابلة للإشتقاق عند x_0=-2

التفسير الهندسي : المنحنى (C_g) يقبل نصفي مماسين عند النقطة الزاوية A(-2 .0) شعاع توجيههما; $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ و $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3- لما $x \in [-2, -1[$: (C_g)منطبق على (C) منحنى الدالة f

لما $]-\infty, -2] \cup]-1, +\infty[$: $(\ \ _g)$نظير الجزء الغير منطبق بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

التمرين الثاني :

الجزء 01 : 1/ تغيرات h : النهايات 0 = $f(0)$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln(x^2+1) - \frac{2x^2}{x^2+1}\right] = +\infty$$

الإشتقاق من أجل كل قيم x من $]0,+\infty[$:

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x(x^2+1)-2x(2x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x^3+4x-4x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1)-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

إشارة $h'(x)$: من إشارة (x^2-1) لأن : $2x > 0$ $\quad (x^2+1)^2 > 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		+		−		−		+	
$h'(x)$		+		−	||	−		+	

2) جدول تغيرات الدالة h : $h(1) = ln2 - 1$

x	0		1		$\propto$		$+\infty$
$h'(x)$	x||	-		+			
$h(x)$	0	↘	$-1+ln2$	↗	0	↗	$+\infty$

3– نستعمل برهنة القيم المتوسطة:

4–إشارة h(x)

x	0		$\propto$		$+\infty$
$h(x)$	0	-	0	+	

الجزء الثاني:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(\dots)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}}{x}\right) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}$$

الإستنتاج : الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين $x_0 = 0$

2-معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$(\Delta): y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad (\Delta): y = x$$

3- من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{\ln[x^2(1+\frac{1}{x^2})]}{x}$$

$$f(x) = \frac{\ln x^2 + \ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \quad \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{{}_2}\right) = \lim_{y\to 1} \ln y = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

4 – من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)(x) + \ln(x^2+1)}{x^2}$$

$$f'(x)\frac{\left(\frac{2x^2}{x^2+1}\right) - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{-\left(\ln(x^2+1) - \frac{2x^2}{x^2+1}\right)}{x^2} = \frac{-h(x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-h(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	0		$\propto$		$+\infty$
$f'(x)$	||	-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\propto)$	$\nearrow$	0

5- لدينا $f(\propto) = \frac{\ln(x^2+1)}{\propto}$ و $\propto$ حل للمعادلة $h(x) = 0$ ومنه $h(\propto) = 0$

$h(\propto) = 0$ يكافئ $ln(\propto^2+1) - \frac{2\propto^2}{\propto^2+1} = 0$ يكافئ $ln(\propto^2+1) = \frac{2\propto^2}{\propto^2+1}$

$$f(\propto) = \frac{\frac{2\propto^2}{\propto^2+1}}{\propto} = \frac{2\propto^2}{\propto^2+1} \times \frac{1}{\propto} = \frac{2\propto}{\propto^2+1}$$

إيجاد حصرا لـ $f(x)$: $f(x) = (2\propto)(\frac{1}{\propto^2+1})$

$(1.9 < \propto < 2)$ يكافئ $(3.8 < 2\propto < 4)$

$(1.9 < \propto < 2)$ يكافئ $(3.61 < \propto^2 < 4)$ يكافئ $(\frac{1}{4} < \frac{1}{2\propto^2+1} < \frac{1}{3.61})$

يكافئ $(0.25 < \frac{1}{2\propto^2+1} < 0.27)$

لدينا: $\begin{pmatrix} 3.8 < 2\propto < 4 \\ 0.25 < \frac{1}{\propto^2+1} < 0.27 \end{pmatrix}$. : يكافئ $(0.950 < (2\propto)(\frac{1}{\propto^2+1}) < 1.08)$

يكافئ $(0.95 < f(x) < 1.08)$

التمرين الثالث:

1- أ/ من أجل كل عدد حقيقي x: $(f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2$

$f'(x) = \sqrt{1 + (f(x))^2}$

و منه $f'(x) \neq 0$

2-من أجل كل عدد حقيقي x : $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$ و منه

$2f''(x) \times f'(x) - 2f'(x) \times f(x) = 0$

$2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$

$F''(x) - f(x) = 0$ يكافئ $f''(x) = f(x)$ (لأن $f'(x) \neq 0$)

2– أ/ $U(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1 \quad , \quad V(0) = f'(0) - f(o) = 1 - 0 = 1$

ب/ من أجل كل x من R : $U'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) \quad = \quad u(x)$

$V'(x) = f''(x) - f''(x) = -(-f''(x) + f'(x))$

$= -(f'(x) - f(x)) = -v(x)$

جـ/ حلول المعادلة $U' = -U$ هي الدوال : $U(x) = Ke^{x}$ حيث $K \in R$

$U(0) = 1$ يكافئ $K = 1$ و منه $U(x) = e^{x}$

حلول المعادلة $V' = V$ هي الدوال $V(x) = Ke^{-x}$ حيث $K \in R$

$V(0) = 1$ يكافئ $K = 1$ و منه $V(x) = e^{-x}$

3– لدينا : $\begin{cases} u(x) = f'(x) + f(x) \\ V(x) = f'(x) - f(x) \end{cases}$ بالطرح نجد : $U(x) - V(x) = 2f(x)$

$f(x) = \frac{U(x) - V(x)}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$