الشعبة : علوم تجريبية 3ASS	إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات	فيفري 2010 المـدة: 03سا

الموضوع الثاني

التمرين الأول(05ن):

1) بين أن 2 حلا للمعادلة: $Z^3 - 8 = 0 \dots (1)$

2) بين أن: $Z^3 - 8 = (Z-2)(aZ^2 + bZ + C)$ حيث c, b, a أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3) استنتج حلول المعادلة (1).

4) في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط C, B, A ذات اللواحق Z_C, Z_B, Z_A

حيث: $Z_A = -1 + i\sqrt{3}; \quad Z_B = -1 - i\sqrt{3}, \quad Z_C = 2,$

أ- أنشئ النقط C, B, A.

ب- بين ان: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

5) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث $Z = x + iy$ عين المجموعة (E) التي تحقق: $|Z+2| = 2$

التمرين الثاني (05ن):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $2x + y - 2z + 4 = 0$

والنقط $A(3,2,6), \quad B(1,2,4), \quad C(4,-2,5),$

1) أ- تحقق أن النقط C, B, A تحدد مستو.

ب-بين ان هذا المستوي هو (P).

2) أ- بين أن المثلث ABC مثلث قائم.

ب- اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل 0 ويعامد (P).

ج- لتكن K المسقط العمودي للنقطة O على (P) . أحسب المسافة OK

نعتبر جملة مثقلة $\{(0,3),\ (A,1)\ ,\ (B,1),\ \ (C,1)\}$

أ) بين أن هذه الجملة تقبل مرجح نرمز له G .

ب) لتكن النقطة I مركز ثقل المثلث ABC . بين أن G نقطة من المستقيم (OI)

ت) أحسب المسافة بين النقطة G والمستوي (P).

3) لتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=5$.عين المجموعة (E).

التمرين الثالث(10ن):

g دالة لمتغير حقيقي x معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-3x^2+3-lnx^2$

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) أحسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: f دالة لمتغير حقيقي x معرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{lnx}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{3}{2}x+1$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$

2) استنتج تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-\frac{3}{2}x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $(+\infty)$

4) أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ).

5) بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

6) أرسم المنحنى (C)

المستوى: الثالثة ثانوي علوم تجريبية

تصحيح اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات (الموضوع الثاني)

1) لدينا: $(2)^3-8=8-8=0$ ومنه 2 حلا للمعادلة 1

2) إيجاد b,a و c $Z^3-8=(Z-2)(aZ^2+bZ^2+bZ+c)$

ومنه $Z^3-8=aZ^3+bZ^2+cZ-2aZ^2-2bZ-2C$

$Z^3-8=aZ^3+(b-2a)Z^2+(c-2c)Z-2C$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=0 \\ -2c=-8 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}$

ومنه $Z^3-8=(Z-2)(Z^2+2Z+4)$

3) Z^3-8 يكافئ $(Z-2)(Z^2+2Z+4)=0$ يكافئ $Z-2=0$ أو $Z^2+2Z+4=0$

$Z-2=0$ يكافئ $Z=2$

*$Z^2+2Z+4=0$ ……. لدينا: $\Delta=4-4(1)(4)=4-16=-12$ ومنه

$\Delta=12i^2=(2\sqrt{3}i)^2$

المعادلة * تقبل حلين مترافقين: $Z_1=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{2}=-1-\sqrt{3}i$

$Z_2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2}=-1+\sqrt{3}i$ $S=\{2,-1-\sqrt{3}i,-1+\sqrt{3}i\}$

4) ب- إثبات أن: $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ لدينا: $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}=\frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-3+i\sqrt{3}-2}=\frac{-3-\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}$

$\begin{cases} Cos\theta_1=\frac{-3}{2\sqrt{3}} \\ Sin\theta_1=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} Cos\theta_1=\frac{-\sqrt{3}}{2} \\ Sin\theta_1=\frac{-1}{2} \end{cases}$

$$Arg(Z_B-Z_C)=\pi+\frac{\pi}{6}+2\pi K=\frac{7\pi}{6}+2\pi\ K/K\in Z$$

ولدينا: $|Z_A-Z_C|=|-3+\sqrt{3}i|=2\sqrt{3}$

$\begin{cases} Cos\theta_2=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Sin\theta_2=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \end{cases}$ يكافئ $Arg(Z_B-Z_C)=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi K=\frac{5\pi}{6}+2\pi K/\in Z$

ومنه $\left|\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}\right|=\frac{|Z_B-Z_C|}{|Z_A-Z_C|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$

$$Arg\left(\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}\right)=Arg\,(Z_B-Z_C)-Arg(Z_A-Z_C)+2\pi K/K\in Z$$

$$=\frac{7\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}+2\pi K=\frac{2\pi}{6}+2\pi K=\frac{\pi}{3}+2\pi K/K\in Z$$

فالشكل الأسي $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

استنتاج صيغة المثلث ABC : لدينا: $Arg\left(\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi K$ فالمثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) $|Z+2|=2$ يكافئ $|x+iy+2|=2$ يكافئ $|x+2+iy|=2$

ومنه $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2$ يكافئ $(x+2)^2+y^2=4$ إذن مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها $w(-2{,}0)$

ونصف قطرها $R=2$

التمرين 02:

1) أ- لدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\neq K\overrightarrow{AC}$ حيث: K عدد حقيقي فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{A}$ غير مرتبطان خطا إذن النقط C,B,A تحدد مستويا.

ب- لدينا النقط C,B,A تحقق المعادلة فالمستوي (ABC) هو (P)

2) أ- لدينا $BC\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$ $AB=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}, AC=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}$

$$BC=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$$

ولدينا: $AB^2+AC^2=8+18=26$ و $B^2=26$ إذن $AB^2+AC^2=8+18=BC^2$ قائم في A .

لدينا الشعاع الناظمي للمستوي (P) هو: $\vec{n}(2,1,-2)$ بما أن (P) (Δ) فإن $\vec{n}$ شعاع توجيه (Δ)

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(\Delta)$ يكافئ $\overrightarrow{OM}=t\vec{n}$ حيث: t عدد حقيقي.

لدينا: $\vec{n}(2,1,-2),\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM}=t\vec{n}$ يكافئ $t\in R$ $\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=-2t\end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

ج) حساب المسافة OK : K المسقط العمودي للنقطة O على (P) هي نقطة تقاطع المستوي والمستقيم (Δ)

لدينا: $\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=-2t\\ 2x+y-2z+4=0\end{cases}$ يكافئ $2(2t)+t-2(-2t)+4=0$

يكافئ $4t+t+4t+4=0$

يكافئ $9t=-4$ يكافئ $t=\frac{-4}{9}$

ومنه $\begin{cases} x_K = \frac{-8}{9} \\ y_K = -\frac{4}{9} \\ z_K = \frac{8}{9} \end{cases}$ $K(\frac{-8}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{8}{9})$

$$OK = \sqrt{\left(\frac{-8}{9}\right)^2 + \left(\frac{-4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{16}{81} + \frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{144}}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

ط2: المسافة OK هي المسافة بين O والمستوي (P) : $d = \frac{|4|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}} = \frac{4}{3}$

3) أ- لدينا: $3+1+1+1 = 6 \neq 0$ فالجملة تقبل مرجحا G

ب- لدينا: $\begin{cases} x_I = \frac{3+1+4}{3} = \frac{8}{3} \\ y_I = \frac{2+2+(-2)}{3} = \frac{2}{3} \\ z_G = \frac{6+4+5}{3} = \frac{15}{3} \end{cases}$ $I\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{15}{3}\right)$

لدينا: $\overrightarrow{OI}\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{15}{3}\right)$ ولدينا: $\begin{cases} x_G = \frac{0+3+1+4}{3+1+1+1} = \frac{8}{6} \\ y_G = \frac{2+2+(-2)}{6} = \frac{2}{6} \\ z_G = \frac{6+4+5}{6} = \frac{15}{6} \end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{OG}\left(\frac{8}{6}, \frac{2}{6}, \frac{15}{6}\right)$

لدينا: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$ فالشعاعان $\overrightarrow{OG}$ و $\overrightarrow{OI}$ مرتبطان خطا فالنقط G,I,O في استقامية إذن G نقطة في المستقيم (OI)

ط2) لدينا G مرجح الجملة $\{(0,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$ ومنه G مرجح الجملة $\{(0,3),(I,3)\}$ تحقق

$3\overrightarrow{GO} + 3\overrightarrow{GI} = \vec{0}$ يكافئ $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$ ومنه G منتصف $[OI]$ إذن G نقطة من المستقيم (OI)

ج) $$d = \frac{\left|2\left(\frac{8}{6}\right)+\frac{2}{6}-2\left(\frac{15}{6}\right)+4\right|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}} = \frac{\left|\frac{16+2-30+24}{6}\right|}{\sqrt{9}}$$

$$d = \frac{\left|\frac{2}{6}\right|}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$$

4) $\left\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5$ يكافئ $\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = 5$ يكافئ $6MG = 5$ يكافئ $MG = \frac{5}{6}$

مجموعة النقط (5) هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R = \frac{5}{6}$

التمرين 03:

1) **النهايات:** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}(-3x^2 + 3 - 2\ln x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}(-3x^2 + 3 - 2\ln x) = -\infty$$

2) **الإشتقاق:** من اجل كل قيم x من $]0, +\infty[$: $g'(x) = -6x - \frac{2}{x} = \frac{-6x^2-2}{x}$ إشارة $g'(x)$:

$g'(x) < 0$

لأن من أجل كل x من $]0،+\infty[$: $x>0$ و $-6x^2-2<0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||				
$g(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↘	$+\infty$

3) $g(1)=0$ إشارة $\mathrm{g}(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	+	0	-	

الجزء الثاني:

1) من أجل كل x من $]0،+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(x)-lnx}{x^2}+\frac{2}{4x^2}-\frac{3}{2}=\frac{1-lnx}{x^2}+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{2-2lnx+1-3x^2}{2x^2}=\frac{-3x^2+3-2lnx}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$$

2) النهايات:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{lnx}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{3}{2}x+1\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(lnx\times\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{3}{2}x+1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{3}{2}x+1\right)=-\infty$$

إشارة $f'(x)$: من إشارة $\mathrm{g}(x)$ لأن: $2x^2>0$

جدول تغيرات f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	-	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

$$f(1) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -1$$

3) لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{3}{2}x + 1\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{lnx}{x} - \frac{1}{2x}\right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = -\frac{3}{2}x + 1$ بجوار $(+\infty)$

4) وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ): ندرس إشارة الفرق $(f(x) - y)$

من اجل كل x من $]0، +\infty[$: $f(x) - y = \frac{lnx}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{2lnx-1}{2x}$

إشارة الفرق من إشارة البسط لأن من أجل كل x من $]0، +\infty[$: $2x > 0$

$2lnx - 1 = 0$ يكافئ $lnx = \frac{1}{2}$ يكافئ $x = e^{1/2}$

$2lnx - 1 > 0$ يكافئ $lnx > \frac{1}{2}$ يكافئ $x = e^{1/2}$

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	-	0	+	

$x \in]0, e^{1/2}[$: (C) يقع تحت (Δ)

$x \in]e^{1/2}, +\infty[$: (C) يقع فوق (Δ)

$x = e^{1/2}$: $(C) \cap (\Delta) = \{A(e^{1/2}, f(e^{1/2}))\}$

5) لدينا من اجل كل x من $]0، +\infty[$: $f'(x) = \frac{-3x^2+3-2lnx}{2x^2}$

$$f''(x) = \frac{\left(-6x - \frac{2}{x}\right)(2x^2) - 4x(-3x^2+3-2lnx)}{(2x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{[-6x^2-2+6x^2-6+4lnx]}{4x^4}$$

$$= \frac{4lnx-8}{2x^3} = \frac{4(lnx-2)}{2x^3}$$

إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط لأن: $2x^3 > 0$ من أجل كل x من $]0، +\infty[$

$f''(x) = 0$ يكافئ $lnx = 2$ يكافئ $x = e^2$

$f''(x) > 0$ يكافئ $x > e^2$

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	||	-	0	+	

$f''(x)$ تنعدم عند $x_0 = e^2$ وتغير إشارتها بجوار $x_0 = e^2$ ومنه (C) يقبل نقطة انعطاف $w(e^2, f(e^2)$