الشعبة : الثالثة ثانوي علوم تجريبية 3ASS	إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات	فيفري 2010
		المــدة: 03سا

الموضوع الأول

التمرين الأول (06 نقاط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=-1+x+2\ln(x)$.

1) أ ـ ادرس تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$

ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة g .

2) أ ـ احسب $g(1)$ ثم حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

ب ـ استنتج أن : $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$. لما $x>1$

$g\left(\frac{1}{x}\right)>0$. لما $0<x<1$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على R^* بما يلي : $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x & ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(o\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) بين أن f دالة مستمرة في النقطة 0 على اليمين .

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين . ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟

3) ـ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

4) أ ـ بين أن : $f'(x)=x.g\left(\frac{1}{x}\right)$ مهما يكن $x\in\ ]0\,;+\infty[$

ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $1<\alpha<2$.

6) أ ـ تحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=x$.

حي قالول- برج البحري-الجزائر
Web site : www.ets-salim.com /021.87.16.89 :الفاكس Tel-Fax : 021.87.10.51 :☏

ب ـ بين انه لما $x \in]0,1[$ فإن $f(x) > x$

ج ـ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T) .

7) أنشئ المنحنى (C) .

التمرين الثاني (06 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثلين الوسيطين الآتيين :

$$(\Delta):\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2+\lambda \quad ;\lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2-2\lambda \end{cases} \qquad (\Delta'):\begin{cases} x = 6+\alpha \\ y = 1-2\alpha \quad ;\alpha \in \mathbb{R} \\ z = 5+\alpha \end{cases}$$

1. بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .
2. A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ') .
   - عين إحداثيات النقطتين A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عمودياً على كل من (Δ) و (Δ')
   - أحسب الطول AB .
3. عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .
4. أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ما ذا تلاحظ ؟

التمرين الثالث (08 نقاط)

في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

$z_A = 1-i$ و $z_B = 3+i$ و $z_C = -3$ و $z_D = 2$.

نعتبر التطبيق f الذي يرفق كل نقطة M ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث :

$z' = z^2 - 4z$.

1. حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي .
2. أ ـ بين أن $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $z^2 - 3z + 3 = 0$.

   ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 3z + 3 = 0$.
3. أ ـ عبر عن : $z'+4$ بدلالة $z-2$.

   ب ـ استنتج أن : $|z'+4| = |z-2|^2$ ثم عبر عن $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

   ج ـ بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و نصف قطرها .

حي قالول- برج البحري-الجزائر
Web site : www.ets-salim.com /021.87.16.89 :الفاكس Tel-Fax : 021.87.10.51 :☏

تصحيح إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2\ln(x)$

أ ـ دراسة تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty \end{cases}$$

الدالة المشتقة $g'(x) = 1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x+2}{x}$

ب) جدول تغيرات الدالة g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

جـ) حساب $g(1)$: $g(1) = -1 + 1 + 2\ln(1) = 0$

• إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$:

لما : $0<x<1 \;\leftarrow\; g(x)<0$

لما : $x>1 \;\leftarrow\; g(x)>0$ و لما : $x=1 \;\leftarrow\; g(1)=0$

ب ـ استنتاج : لما : نقوم بتغيير المتغير : $x=\dfrac{1}{X} \leftarrow 0<\dfrac{1}{X}<1 \leftarrow 1<X \leftarrow g(\dfrac{1}{X})<0$

نقوم بتغيير المتغير : $x=\dfrac{1}{X} \leftarrow \dfrac{1}{X}>1 \leftarrow 1>X>0 \leftarrow g(\dfrac{1}{X})>0$

الجزء الثاني :

الدالة f المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = x - x^2\ln x \quad ; \quad x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) بين أن f دالة مستمرة في النقطة 0 على اليمين . علما أن : $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x) = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x - x^2\ln x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x(1-x\ln x)) = 0(1-0) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
و منه f دالة مستمرة على اليمين 0

2) دارسة قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين .

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-x^2\ln x)-0}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-x^2\ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(1-x\ln x)}{x} \\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}(1-x\ln x) = 1 \end{cases}$$

و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين النقطة 0 .

• التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟ نقول أن المنحنى يقبل نصف مماس على اليمين النقطة 0 ميله 1

3) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim(x - x^2 \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - x\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(1 - x\ln x) = -\infty \end{cases}$$

4) أ ـ تبيان أن : $f'(x) = x.g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ مهما يكن $x \in \left]0\,;+\infty\right[$

$$\begin{cases} f'(x) = (x)' - (x^2\ln x)' = 1 - \left[(2x)\times\ln x + (x^2)\times(\frac{1}{x})\right] \\ f'(x) = 1 - [(2x)\times\ln x + x] = 1 - x - 2x\ln x = \\ f'(x) = 1 - x + 2x\ln x = x(\frac{1}{x} - 1 - 2\ln x) = x(\frac{1}{x} - 1 + 2\ln\frac{1}{x}) \\ f'(x) = x.g(\frac{1}{x}) \end{cases}$$

ب ـ جدول تغيرات الدالة f . : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(\frac{1}{x})$ على المجال $]0,+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	0 ↗	1	↘ $-\infty$

5) تبيان أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $1<\alpha<2$.

- الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $]0,+\infty[$ فهي مستمرة على المجال $]1\,;2\,[$
- الدالة f رتيبة (متزايدة تماماً) على المجال $]1\,;2\,[$
- و أن : $f(1)\times f(2)<0$ مع : $f(1)=1>0$ و $f(2)=-0{,}77<0$

و منه حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α المجال $]1\,;2\,[$

6) أ ـ التحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y=x$.

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

معادلة المماس : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1.(x-0) + 0$

$$y = x$$

ب ـ تبيان انه لما $x \in \left]0{,}1\right[$ فإن $f(x) > x$

نعلم أنه لما : $1 > x > 0 \Rightarrow Ln(x) < 0 \Rightarrow x^2.Ln(x) < 0$

$1 > x > 0 \Rightarrow -x^2.Ln(x) > 0$

$1 > x > 0 \Rightarrow x - x^2.Ln(x) > x$

و منه $1 > x > 0 \Rightarrow f(x) > x$

حي قالول– برج البحري–الجزائر
Tel-Fax : 021.87.10.51 :☏ :الفاكس/021.87.16.89 Web site : www.ets-salim.com

ج ـ الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T)

لدينا مما سبق $1 > x > 0$ ← $f(x) > x$ أي : $f(x) - x > 0$

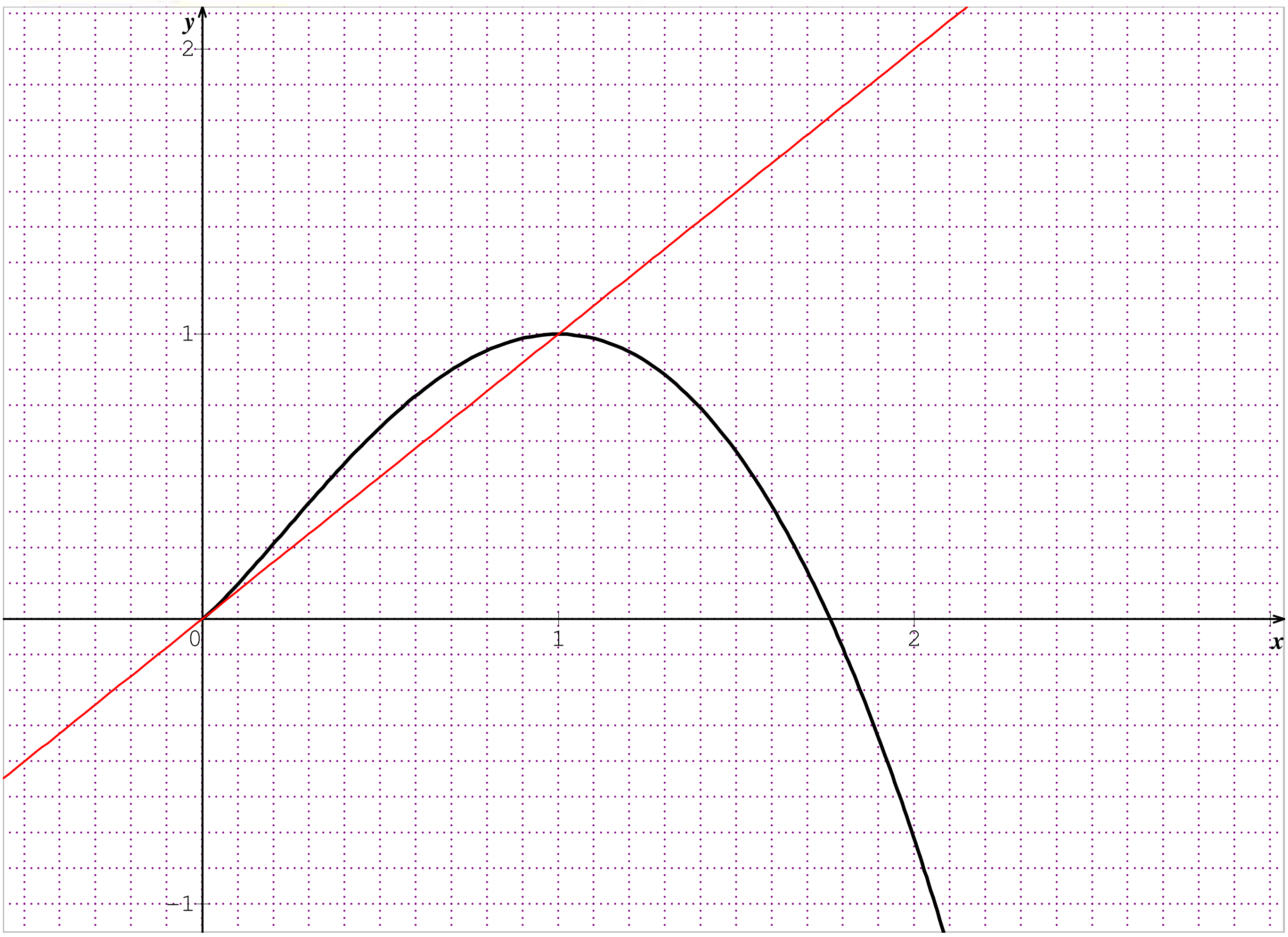
و من جهة : $x > 1$ ← $Ln(x) > 0$ ← $x^2.Ln(x) > 0$

$x > 1$ ← $-x^2.Ln(x) < 0$

$x > 1$ ← $f(x) - x < 0$ و منه نستنتج أن المنحنى (C) فوق المماس (T)

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C) فوق (T)	(C) يقطع (T)	(C) تحت (T)

7) المنحنى (C) .



التمرين الثاني

$$(\Delta'):\begin{cases} x = 6+\alpha \\ y = 1-2\alpha \quad ;\ \alpha\in\mathbb{R} \\ z = 5+\alpha \end{cases} \qquad (\Delta):\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2+\dfrac{1}{2}\lambda \quad ;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z = -2-2\lambda \end{cases}$$

1. تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}+1\\+\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$ و $\vec{u_2}\begin{pmatrix}+1\\-2\\+1\end{pmatrix}$. $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-2}{+1/2}$ $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا .

لحل الجملة $\begin{cases}6+\alpha=3+\lambda\\5+\alpha=-2-2\lambda\end{cases}$ نجد : $\begin{cases}\lambda=\dfrac{-4}{3}\\ \alpha=\dfrac{-13}{3}\end{cases}$

النقطة من (Δ_1) من أجل $\lambda=\dfrac{-4}{3}$ هي $(\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3})$ و النقطة من (Δ_2) من أجل $\alpha=\dfrac{-13}{3}$ هي $(\dfrac{5}{3};\dfrac{29}{3};\dfrac{2}{3})$

إذن المستقيمان (Δ_1) و (Δ_1) ليسا من نفس المستوي .

2. A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ') .

- **تعيين إحداثيات النقطتين** A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عمودياً على كل من (Δ) و (Δ')

شعاع توجيه المستقيم (AB) هو الشعاع $\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$. $\vec{AB}\begin{pmatrix}3+\alpha-\lambda\\-1-2\alpha-\lambda\\7+\alpha+2\lambda\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases}\vec{u_1}.\vec{AB}=0 & \rightarrow(3+\alpha-\lambda)(1)+(-1-2\alpha-\lambda)(1)+(7+\alpha+2\lambda)(-2)=0\\ \vec{u_2}.\vec{AB}=0 & \rightarrow(3+\alpha-\lambda)(1)+(-1-2\alpha-\lambda)(-2)+(7+\alpha+2\lambda)(1)=0\end{cases}$$

$$A(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})\quad ;\ B(\frac{14}{3},\frac{11}{3},\frac{11}{3})\leftarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{-4}{3}\\ \alpha=\dfrac{-4}{3}\end{cases}\leftarrow\begin{cases}\vec{u_1}.\vec{AB}=0 & \rightarrow\alpha+2\lambda+4=0\\ \vec{u_2}.\vec{AB}=0 & \rightarrow2\alpha+\lambda+4=0\end{cases}$$

- **حساب الطول AB** : $AB=\sqrt{(\dfrac{14}{3}-\dfrac{5}{3})^2+(\dfrac{11}{3}-\dfrac{2}{3})^2+(\dfrac{11}{3}-\dfrac{2}{3})^2}=3\sqrt{3}.$

3. عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .

أي المستوي الذي شعاعه الناظمي يكون موازياً لـ $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ و يشمل النقطة $A(\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$ مثلاً

$$(P)/:\ x+y+z-3=0 \quad / \quad (P)/:\ 3(x-\frac{5}{3})+3(x-\frac{2}{3})+3(x-\frac{2}{3})=0 \quad :\ \text{أي}\quad \vec{AM}.\vec{AB}=0$$

4. حساب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ؟

حي قالول– برج البحري–الجزائر
Tel-Fax : 021.87.10.51 :☏ :الفاكس/021.87.16.89 Web site : www.ets-salim.com

$$d(N;(P))=\frac{|(6+\alpha)+(1-2\alpha)+(5+\alpha)-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$

نلاحظ أنها تبقى ثابتة و مساوي لـ الطول AB

التمرين الثالث

.1 تحديد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي . $z'=z^2-4z$

1. $z_A=1-i\rightarrow z_{A'}=(1-i)^2-4(1-i)=-2i-4+4i=-4+2i$
2. $z_B=3+i\rightarrow z_{B'}=9+6i-1-12-4i=-4+2i$.

.2 أ ـ تبيان أن $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $z^2-3z+3=0$.

$OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $\vec{OM}=\vec{M'C}$. أو الأقطار متناصفة

أي : $z-0=-3-z'$. و منه $z=-3-z^2-4z$. و بالتالي : $z^2-3z+3=0$

ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$.

$z^2-3z+3=0$ المميز $\Delta=9-12=-3=3i^2$ و منه نجد : $z_1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

.3 أ ـ عبر عن : $z'+4$ بدلالة $z-2$. $z'+4=z^2-4z+4=(z-2)^2$.

ب ـ استنتاج أن : $|z'+4|=|z-2|^2$ ثم عبر عن $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

$$(z'+4)=z^2-4z+4=(z-2)^2\Rightarrow\begin{cases}|z'+4|=|z-2|^2\\ \arg(z'+4)=2\arg(z-2)+2k\pi\end{cases}$$

ج ـ تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 فإن النقطة M'

صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و نصف قطرها .

. إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 . هذا يعني : $|z-z_D|=2$.

أي : $|z-2|=2$. بتربيع الطرفين : $|z-2|^2=2^2=4$. أي : $|z'-4|=4$.

و منه فإن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة H(4 ,0) و نصف قطرها **4**.

من إعداد أساتذة مادة الرياضيات.

المؤسسة : المجمع المدرسي الخاص المعتمد – سليم –

السنة الدراسية : 2010/2009

المستوى : الثالثة ثانوي علوم تجريبية

حي قالول– برج البحري–الجزائر

Tel-Fax : 021.87.10.51 :☏ :الفاكس/021.87.16.89 Web site : www.ets-salim.com