الحلّ المفصّل للموضوع الثّاني

التّمرين الأوّل :

ما ورد فيه :
- الإرتباط الخطّي لشعاعين – المسقط العمودي لنقطة علي مستوي
- الوضع النّسبي لمستقيمين من الفضاء أو شرط انتماء أربع نقط إلي نفس المستوي – المرجع .

الحلّ :

نجيب بصحيح أو خطأ مع التّعليل في كلّ حالة من الحالات الاتية :

1) النّقط A ، B و C ليست في استقامية ← صحيح

لدينا ما يلي : $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$ ؛ $\overrightarrow{AC}(1;-3;0)$.

نلاحظ أن : $\frac{y_{AB}}{y_{AC}} \neq \frac{x_{AB}}{x_{AC}}$ وبالتّالي :

لا يوجد عدد حقيقي k يحقّق : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$.

الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقلّان خطّيا . وهذا معناه :

النّقط A ، B و C ليست في استقامية .

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة للمستوي (ABC) ← صحيح

لدينا ما يلي :

$$\begin{cases} 2x_A+2y_A-z_A-11=4+8-1-11=0 \\ 2x_B+2y_B-z_B-11=0+8+3-11=0 \\ 2x_C+2y_C-z_C-11=6+2+3-11=0 \end{cases}$$ وهذا معناه :

إحداثيات النّقط A ، B و C حلّ للمعادلة المعطاة . إذا :

$2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) النّقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنّقطة D علي المستوي (ABC) ← خطأ.

الشّعاع $\vec{n}(2;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

هل : $\begin{cases} \overrightarrow{DE} = k.\vec{n} \ ;k \in \mathbb{R} \\ E \in (ABC) \end{cases}$ ؟

لدينا : $\overrightarrow{DE}(2;2;1)$.

نلاحظ أن : $\frac{y_{\vec{n}}}{y_{DE}} \neq \frac{x_{\vec{n}}}{x_{DE}}$.

$\vec{n}$ و $\overrightarrow{DE}$ ليسا مرتبطين خطّيا أي $\overrightarrow{DE}$ ليس عموديا (ناظميا) علي المستوي (ABC) . ومنه :

E ليست المسقط العمودي للنّقطة D علي المستوي (ABC) .

يمكن أيضا :

*التّحقق من أن $E \notin (ABC)$.

أو

* المقارنة بين DE والمسافة بين النّقطة D والمستوي (ABC) :

$DE \neq d(D;(ABC))$.

أو

*حساب إحداثيات المسقط العمودي النّقطة D علي المستوي (ABC)

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي ← خطأ.

معناه : نظر إن كانت النّقط A، B ، C و D تنتمي إلي نفس المستوي . أي :

هل يوجد عددان حقيقيان (مثلا) x و y حيث :

$\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{AC} + y\,\overrightarrow{AD}$ ؟

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$، $\overrightarrow{AC}(1;-3;0)$ ، $\overrightarrow{AD}(-1;-4;-3)$

نحلّ في $\mathbb{R}^2$ الجملة :

$\begin{cases} -2 = x - y ...(1) \\ 0 = -3x - 4y ...(2) \\ -4 = -3y ...(3) \end{cases}$. من (3) نجد : $y = \frac{4}{3}$.

بالتّعويض في (1) نجد : $x = -\frac{2}{3}$.

هل هذا الحلّ مقبول أي هل هو متلائم (يحقّق) مع المعادلة (2) .

لدينا : $-3\left(-\frac{2}{3}\right) - 4\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0$. وعليه :

لا يوجد عددان حقيقيان x و y حيث : $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{AC} + y\,\overrightarrow{AD}$.

النّقط A، B ، C و D لا تنتمي إلى نفس المستوي . ومنه :

المستقيمان (AB) و (CD) لا يقعان في نفس المستوي .

5) الجملة المعطاة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) ← صحيح

هل إحداثيات النّقطتين C و D حلاّ للجملة ؟

لدينا :

** $\begin{cases} 3 = 2t - 1 \\ 1 = t - 1 \\ -3 = -t - 1 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$ توجد قيمة وحيدة للوسيط t أي :

إحداثيات C حلّ للجملة ... (1) .

** $\begin{cases} 1 = 2t - 1 \\ 0 = t - 1 \\ -2 = -t - 1 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ توجد قيمة وحيدة للوسيط t أي :

إحداثيات D حل للجملة ... (2) .

من (1) و (2) ينتج :

$$(CD) : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = -t - 1 \end{cases}$$

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ هي مرجح

الجملة $\{(A;\alpha),(B,\beta)\}$ ← صحيح.

هل يوجد عددان حقيقيان α و β حيث : $\alpha.\overrightarrow{IA} + \beta.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

لدينا : $\overrightarrow{IA}\left(\frac{7}{5};0;\frac{14}{5}\right)$ ؛ $\overrightarrow{IB}\left(-\frac{3}{5};0;-\frac{6}{5}\right)$.

في هذه الحالة :

$\alpha.\overrightarrow{IA} = -\beta.\overrightarrow{IB}$ معناه $\frac{7}{5}\alpha + \frac{14}{5}\alpha = \frac{3}{5}\beta + \frac{6}{5}\beta$

معناه $21\alpha = 9\beta$

معناه $7\alpha = 3\beta$.

يوجد عدد لا نهائي من الثنائيات $(\alpha;\beta)$.

نأخذ مثلا $\alpha = 3$ ؛ نجد $\beta = 7$

النقطة I مرجح الجملة $\{(A;3),(B;7)\}$.

التّمرين الثّاني :

ما ورد فيه :
- الشكل الأسّي لعدد مركّب – المفهوم الهندسي للطويلة والعمدة
- الأعداد المركّبة ومجموعات النّقط – الدّوران .
-صورة شكل هندسي بواسطة دوران .

الحل :

1) أ –) كتابة كلاّ من z_B و z_C علي الشّكل الأسّي .

لدينا : $z_A = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ معناه $\overline{z_A} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

في هذه الحالة :

* $z_B = -\overline{z_A}$ يكافئ $z_B = -2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)}$ أي : $z_B = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$.

* $z_C = -(z_A + z_B)$ ومنه $z_C = -\left(z_A - \overline{z_A}\right)$

$= -2i \times \mathrm{Im}(z_A)$

$= -2\left(2i.\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= -2i$

$= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

- ب) إستنتاج أنّ النّقط A ، B و C تنتمي إلي دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

نلاحظ ما يلي : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$.

هندسيا هذا معناه : $OA = OB = OC = 2$. وبالتّالي :

النّقط A ، B ، C تنتمي غلي الدّائرة (γ) الّتي مركزها النّقطة O ونصف قطرها 2 .

- جـ) إنشاء الدّائرة (γ) ثمّ النّقط A ، B و C .

(أنظر الشّكل: آخر التّمرين).

2) أ –) تتحقّق أنّ $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

لدينا : $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = -\sqrt{3} + i$ و $z_C = -2i$.

بالتّعويض نجد : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i + 2i}{-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i}$

$= \frac{-\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

أي : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

للتّذكير :

* كل علاقة من الشّكل : $z = re^{i\theta}$ حيث : $r \succ 0$ هي الكتابة الأسّية للعدد المركّب z المعرّف بـ : $z = [r;\theta]$.

*) في حالة $r \prec 0$:

نأخذ مثلا : $z = -5e^{i\theta}$.

كيف نستنتج الكتابة الأسّية لـ z ؟

لاحظ أنّ $z = -5 \times e^{i\theta}$

إذا : $\begin{cases} -5 = [5;\pi] \\ e^{i\theta} = [1;\theta] \end{cases}$

أي : $z = [5 \times 1; \pi + \theta]$

$-5e^{i\theta} = 5e^{i(\pi+\theta)}$.

إذا : إذا كان $r \prec 0$ و $z = re^{i\theta}$ فإنّ الشّكل الأسّي لـ z هو : $z = |r|e^{i(\pi+\theta)}$.

$z_C = |-2|e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$ وبما أنّ القيس الرّئيسي المرفق بـ $\frac{3\pi}{2}$ هو $\frac{\pi}{2}$ يتنج : $z_c = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

- ب) *) إستنتاج أنّ المثلّث ABC متقايس الأضلاع.

حسب ما سبق لدينا : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

وهذا معناه : $\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ أي :

وعليه : $\begin{cases} BA = Bc \\ \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ABC مثلّث متقايس الأضلاع .

*) إستنتاج أنّ النّقطة O هي مركز ثقل المثلّث ABC .

حسب ما سبق :

الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC هي الدّائرة (γ) ذات المركز O .

بما أن المثلّث ABC متقايس الأضلاع فإنّ مركز هذه الدّائرة أي النّقطة O هو أيضا مركز ثقل المثلّث ABC .

- جـ) تعيين ثمّ إنشاء المجموعة (E) ؛ مجموعة النّقط $M(z)$ حيث : $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

$|z| = |z - \sqrt{3} - i|$ معناه $|z| = \left|z - \left(\sqrt{3} + i\right)\right|$

معناه $|z_M| = |z_M - z_A|$

معناه $OM = AM$.

المجموعة (E) هي إذا مجموعة النّقط المتساوية البعدين عن النّقطتين الثّابتتين O و A . أي :

المجموعة (E) هي محور القطعة $[OA]$.

(الإنشاء: أنظر الشّكل- آخر التّمرين) .

3) – أ) تعيين زاوية الدّوران r الّذي مركزه O ويحوّل C إلي A .

ليكن θ قيسا لزاوية الدّوران r .

$r(C) = A$ ومنه $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) \equiv \theta[2\pi]$

أي $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) \equiv \theta[2\pi]$ أي

$\arg(z_A) - \arg(z_C) \equiv \theta[2\pi]$.

أي $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \equiv \theta[2\pi]$. نأخذ $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

- ب) إثبات أنّ صورة (E) بالدّوران r هي محور $[OB]$.

لدينا ما يلي : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \arg(z_B) - \arg(z_A)[2\pi]$ أي:

$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

في هذه الحالة :

$\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ معناه : $r(A) = B$

$(\vec{u};\vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)[2\pi]$

يمكن التّحقّق ممّا يلي :

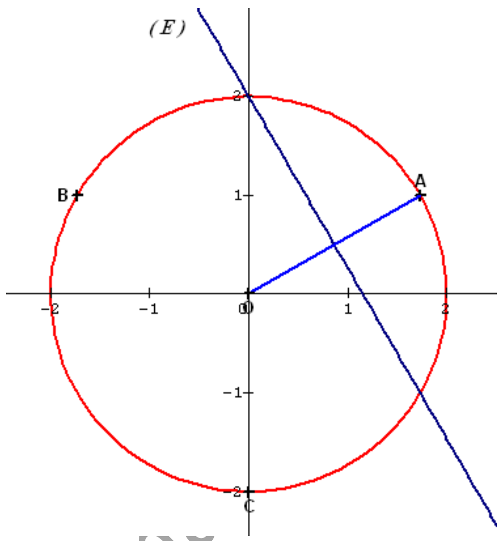
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

- التّقايس يحفظ المسافات ، التّعامد ، التّوازي ... إلخ

ممّا سبق ينتج ما يلي :

صورة الثنائية النقطيّة $(O;A)$ هي الثنائية النّقطيّة $(O;B)$.

بما أنّ الدّوران تقايس فإنّ صورة محور القطعة المستقيمة $[OA]$ أي صورة المجموعة (E) هو محور القطعة المستقيمة $[OB]$.



التّمرين الثّالث :

ما ورد فيه :

- الدّراسة والتّمثيل البياني لاقتصار دالّة تناظرية .
- التمثيل البياني لحدود متتالية معرّفة بعلاقة تراجعيّة .
- مبدأ الإستدلال بالتّراجع – المتتاليتان المتجاورتان .

الحلّ :

I) – 1) **تحديد إتّجاه تغيّر الدّالة f على المجال $]0;+\infty[$** .

* f دالّة قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا :

$f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

* من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ ؛ $f'(x)\succ 0$.

* f دالّة متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2) دراسة وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى المستقيم $(D):y=x$.

لهذا ندرس في المجال $]0;\infty[$ إشارة الفرق $(f(x)-x)$.

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)-x=\dfrac{4x+1}{x+1}-x$

$=\dfrac{-x^2+3x+1}{x+1}$

بما أنّ $(x+1)\succ 0$ على المجال $]0;+\infty[$ فإن إشارة الفرق $(f(x)-x)$ هي إذا من إشارة $(-x^2+3x+1)$

* ندرس في المجال $]0;+\infty[$ إشارة كثير الحدود $(-x^2+3x+1)$.

* $\Delta=13$

لكثير الحدود $\left(-x^{2}+3x+1\right)$ جذران متمايزان في $\mathbb{R}$ هما :

$$x_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \quad ; \quad x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

وإشارته في المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :

x	0		$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

إعتمادا علي هذه الإشارة فإنّ الوضع النّسبي لـ (C_f) و (D) يكون كما يلي :

*) (C_f) أعلي (D) علي المجال $]0;+\infty[$.

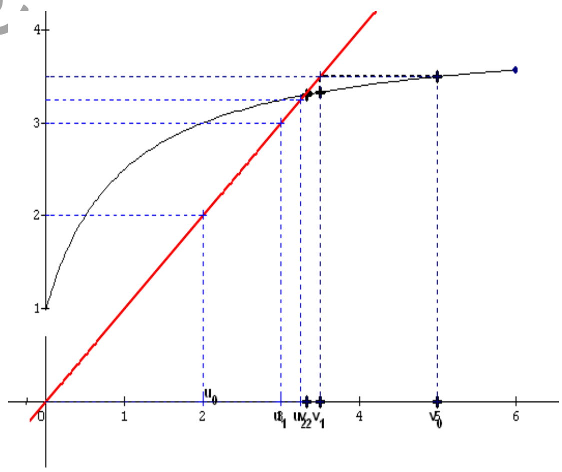
*) (C_f) و (D) يتقاطعان في النّقطة $I\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

*) (C_f) أسفل (D) في المجال $\left]\frac{3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right[$.

3 -) تمثيل (C_f) و (D) علي المجال $[0;6]$.

*) $f(0)=1$ ، $f(6)=\frac{25}{6}$.

*) المستقيم ذو المعادلة $y=4$ مستقيم مقارب لـ (C_f) .



II) – 1) – أ) ننشئ علي حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولي لكلّ من المتتاليتين (u_n) **و** (v_n) .

- أنظر الشّكل أعلاه .

- ب) نخمّن إتّجاه تغيّر وتقارب كلّ من (u_n) **و** (v_n) .

*) المتتالية (u_n) :

لدينا من جهة :

إذا :إذا كانت المتتالية (u_n) رتيبة فهي حتما متزايدة $u_0 \prec u_1 \prec u_2 \prec u_3$ تماما علي $\mathbb{N}$.

من جهة أخري : كلّ حدود المتتالية (u_n) تقترب من فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D) وهذا معناه : (u_n) متقاربة .

*) المتتالية (v_n) :

نلاحظ ما يلي :

-) $v_0 \succ v_1 \succ v_2 \succ v_3$: (v_n) متناقصة تماما في $\mathbb{N}$.

-) كلّ حدود المتتالية (v_n) تقترب من فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D) وهذا معناه : (u_n) متقاربة . إذا : (v_n) متقاربة .

2) – أ) إثبات أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$:

**) $2 \le u_n \prec \alpha$.

نستعمل مبدأ الإستدلال بالتّراجع.

نضع : $n \in \mathbb{N}$; $P(n): 2 \le u_n \prec \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ ..

-) نتحقّق من صحّة $P(0)$.

لدينا فرضا : $u_0 = 2$. إذا $2 \le u_0 \prec \alpha$.

$P(0)$ صحيحة .

-) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي نفرض أنّ $2 \le u_n \prec \alpha$

ونبيّن أنّ $P(n+1)$ صحيحة أي نبيّن ما يلي : $2 \le u_{n+1} \prec \alpha$.

حسب فرضيّة التّراجع : $2 \le u_n \prec \alpha$.

بما أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $[0;6]$ فهي تحفظ التّرتيب

وبالتّالي : $f(2) \le f(u_n) \prec f(\alpha)$

$\begin{cases} f(2)=3 \\ f(u_n)=u_{n+1} \\ f(\alpha)=\alpha \end{cases}$ إذا : $3 \le u_{n+1} \prec \alpha$ وبما أنّ : $2 \le 3$ ينتج :

$2 \le u_{n+1} \prec \alpha$ أي $P(n+1)$ صحيحة .

-) ممّا سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتّراجع نستنتج أنّه :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $2 \le u \prec \alpha$.

**) $\alpha \prec v_n \le 5$.

نضع : $P'(n): \alpha \prec v_n \le 5 \, ; n \in \mathbb{N}$.

-) نتحقّق من صحّة $P'(0)$.

$v_0 = 5$ أي $\alpha \prec v_0 \le 5$.

$P'(0)$ صحيحة .

-) نفرض أن $P'(n)$ صحيحة أي أنّ $\alpha \prec v_n \le 5$ ونبيّن أنّ

$P'(n+1)$ صحيحة أي نبيّن ما يلي : $\alpha \prec v_{n+1} \le 5$.

حسب ما فرضنا : $\alpha \prec v_n \le 5$ ولكون f متزايدة تماما ينتج :

$f(\alpha) \prec f(v_n) \le f(5)$ أي $\alpha \prec v_{n+1} \le \dfrac{21}{6} \le 5$.

إذا : $\alpha \prec v_{n+1} \le 5$ ومنه : $P'(n+1)$ صحيحة.

-) ممّا سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتّراجع نستنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $\alpha \prec v_n \le 5$.

- ب) إستنتاج إتّجاه تغيّر كلّ من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

***) إتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) .**

نحدّد إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ علما أنّ $2 \le u_n \prec \alpha$.

المستقيم (D) هو المنصّف الأوّل .
(D) هو مجموعة النّقط $M(x,x)$.

$f(\alpha)=\alpha$ لأنّ النّقطة ذات الفاصلة α هي نقطة من المستقيم (D) .

كلّ من المتتاليتين (u_n) و (v_n) متتالية محدودة (لكون كلّ منهما محدودة من الأسفل ومن الأعلى).

علي المجال $]2;\alpha[$ ؛ (C_f) أعلي (D) .

جبريا : هذا معناه :

من أجل كلّ x من المجال $]2;\alpha[$: $f(x)-x \succ 0$.

بتعويض x بـ u_n نجد : $f(u_n)-u_n \succ 0$. إذا :

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n \succ 0$.

-- (u_n) متتالية متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

***) إتّجاه تغيّر المتتالية (v_n) .**

بطريقة مماثلة ، نحدّد إشارة الفرق $v_{n+1}-v_n$ علما أنّ $\alpha \prec v_n \leq 5$.

من أجل كلّ من المجال$]\alpha;5[$: $f(x)-x \prec 0$.

بتعويض x بـ v_n نجد : $f(v_n)-v_n \prec 0$. أي :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n \prec 0$.

المتتالية (v_n) متناقصة تماما في $\mathbb{N}$.

3) – أ) إثبات أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا ما يلي :

$$v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{4v_n+1}{v_n+1}-\frac{4u_n+1}{u_n+1}$$

$$= \frac{4u_nv_n+4v_n+u_n+1-4u_nv_n-v_n-4u_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$= \frac{3}{(v_n+1)(u_n+1)} \times (v_n-u_n)$$

حسب ما سبق :

$\begin{cases} u_n \geq 2 \ ; u_n \in [2;\alpha[\\ v_n \geq 2 \ ; v_n \in]\alpha;5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} u_n+1 \geq 3 \\ v_n+1 \geq 3 \end{cases}$ وبالتّالي :

$(v_n+1)(u_n+1) \geq 9$.

في هذه الحالة : $\frac{1}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{1}{9}$. وعليه :

$\frac{3}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{1}{3}$ . . . (1) .

ثمّ لدينا ما يلي : $u_n \prec \alpha \prec v_n$ وهذا معناه : $(v_n-u_n) \succ 0$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج ما يلي :

$\frac{3}{(v_n+1)(u_n+1)} \times (v_n-u_n) \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$ أي ك

من اجل كلّ عدد طبيعي n : $v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

- ب) نبيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $0 \prec v_n-u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

نستعمل مبدأ الإستدلال بالتّراجع .

نضع : $n \in \mathbb{N}$, $P(n): 0 \prec v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

*) نتحقّق من صحّة $P(0)$.

لدينا : $\begin{cases} v_0 - u_0 = 3 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \end{cases}$ إذا : $0 \prec v_0 - u_0 \le \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}$ أي $P(0)$ صحيحة.

*) نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة أي أنّ $0 \prec v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ونبيّن أنّ

$P(n+1)$ صحيحة أي نبيّن ما يلي : $0 \prec v_{n+1} - u_{n+1} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

حسب ما سبق لدينا : $0 \prec v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

وحسب فرضية التّراجع : $0 \prec v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.في هذه الحالة :

$0 \prec v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ أي $0 \prec v_{n+1} - u_{n+1} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

*) ممّا سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتّراجع :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 \prec v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

- جـ) *) نستنتج أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

لدينا : $\begin{cases} 0 \prec v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \end{cases}$ حسب مبرهنة الحصر :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

***) تحديد نهاية كلّ من المتتاليتين** (v_n) **و** (u_n) .

المتتاليتان (v_n) و (u_n) متجاورتين . ومنه :

$\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = \lim\limits_{x \to +\infty} u_n = l \,/\, l \in \mathbb{R}$.

الدّالة f مستمرّة وبالتّالي ، العدد l حلّ للمعادلة $f(l) = l$.

$f(l) = l$ يكافئ $-l^2 + 3l + 1 = 0$ وحسب ما سبق :

الحلّ الوحيد المقبول هو $l = \alpha$.

إذا : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} v_n = \alpha$.

1) (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة .
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$
هذا معناه :
(u_n) و (v_n) متجاورتان .

(u_n) و (v_n) ينتج عن هذا :
كلّ من (u_n) و (v_n) متتالية متقاربة
ولدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} v_n$

التّمرين الرّابع :

ما ورد فيه :
- دراسة دالّة مساعدة أو استنتاجيه
- دراسة الوضع النّسبي لمنحن ومستقيمه المقارب.
- تعيين دالّة أصليّة لدالة .

الحلّ:

I) 1 –) دراسة إتّجاه تغيّر الدّالة g علي $\mathbb{R}$.

*) g دالّة قابلة للإشتقاق علي $\mathbb{R}$ ولدينا :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ؛ $g'(x)=-2-2e^{2x-2}$

$=-2\left(1+e^{2x-2}\right)$.

*)نلاحظ أنّه من اجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)\prec 0$.

*) الدّالة g متناقصة تماما علي $\mathbb{R}$.

$(e^u)'=u'\times e^u$

- 2) *) نبيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في $\mathbb{R}$.

*) نحدّد مجموعة قيم الدّالة g .

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty\ ;\ \begin{cases}(1-2x)\to+\infty\\ e^{2x-2}\to 0;((2x-2)\to-\infty)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{1}{2x}-1-\frac{e^{2x}}{2x}\times\frac{1}{e^2}\right)$$

$$=-\infty\ ;\ \left(2x\to-\infty;\frac{1}{2x}\to 0;\frac{e^{2x}}{2x}\to 0\right)$$

$\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=0$

الدّالة g مستمرّة ومتناقصة تماما في $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$.

حسب مبرهنة التّقابل (القيم المتوسّطة) : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في $\mathbb{R}$.

***) تحقّق أنّ :** $0,36\prec\alpha\prec 0,37$.

لدينا : $g(0,36)\approx 0,0019$ ؛ $g(\alpha)=0$ ؛ $g(0,37)\approx -0,023$

نلاحظ ما يلي : $g(0,37)\prec g(\alpha)\prec g(0,36)$.

الدّالة g مستمرّة ومتناقصة تماما ؛ فهي إذا لا تحفظ التّرتيب.

وعليه : $0,36\prec\alpha\prec 0,37$.

الشّائع هو :

$g(0,36)\times g(0,37)\prec 0$ ؟؟؟

- 3) إستنتاج إشارة $g(x)$ علي $\mathbb{R}$.

إعتمادا علي رتابة الدّالة g وبما أنّ $g(\alpha)=0$ فإنّ إشارة $g(x)$ ممثّلة في الشّكل الآتي :

$-\infty$		α		$+\infty$
	$+$	0	$-$	

II) 1) – أ) نبيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$:

$f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

لدينا من جهة : $f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1$

$$=e^{2x+2}\left(1+2x-\frac{1}{e^{2x+2}}\right)$$

$=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)$.

من جهة أخري : $g(-x)=1+2x-e^{-2x-2}$. ومنه :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

- ب) نستنتج أنّ f متناقصة تماما علي المجال $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما علي المجال $[-\alpha;+\infty[$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $e^{2x+2} \succ 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$.

حسب ما سبق :

*)إذا كان $x \in]-\infty;\alpha]$ فإنّ $g(x) \geq 0$ ومنه :

إذا كان $(-x) \in [-\alpha;+\infty[$ فإنّ $g(-x) \geq 0$.

*) إذا كان $x \in [\alpha;+\infty[$ فإنّ $g(x) \leq 0$ ومنه:

إذا كان $(-x) \in]-\infty;\alpha]$ فإنّ $g(-x) \leq 0$.

إذا إشارة $g(-x)$ أي إشارة $f'(x)$ كما يلي :

$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
	$-$	0	$+$	

وعليه :

*) f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-\alpha;+\infty[$.

2) *) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x+2}(2x+2)e^{2x+2} - x + 1$$

$$= +\infty \ ; \begin{cases} \dfrac{x}{2x+2} \to 0 ; (2x+2)e^{2x+2} \to 0 \\ (-x+1) \to +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0^{+}$$

بوضع $X = 2x+2$:

$$\lim_{x\to-\infty} (2x+2)e^{2x+2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= +\infty \ ; \begin{cases} e^{2x+2} - 1 \to +\infty \\ \dfrac{1}{x} \to 0 \end{cases} .$$

***) تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f .**

إعتمادا على النّتائج السّابقة ؛ جدول تغيّرات الدّالة f يكون كالآتي :

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) *) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$.

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x-1] = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2x+2}\right)(2x+2)e^{(2x+2)}$$

$$= 0$$

***) نفسّر النّتيجة هندسيا .**

في جوار $(-\infty)$ ، المستقيم الّذي معادلته $y = -x + 1$ ، مستقيم مقارب للمنحني (C_f) .

4) **ندرس وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلي المستقيم (Δ) .**

لهذا ندرس في $\mathbb{R}$ إشارة الفرق : $\left[f(x)-(-x+1)\right]$.

$$\left[f(x)-(-x+1)\right]=xe^{2x+2}$$

نلاحظ أنّ إشارة هذا الفرق من إشارة (x) وهي كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

إعتمادا علي إشارة الفرق ؛ الوضع النّسبي لـ (C_f) و (Δ) كما يلي :

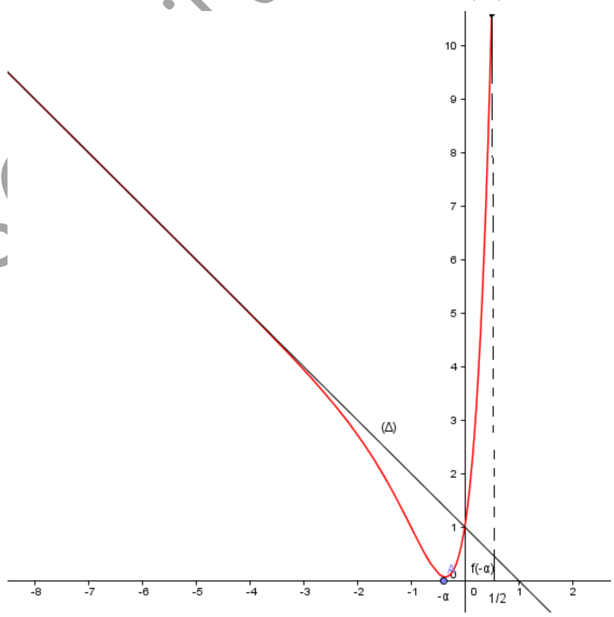
*) (C_f) أسفل (Δ) علي المجال $]-\infty;0[$.

*) (C_f) و (Δ) يشتركان في النّقطة ذات الإحداثيتين $(0;-1)$.

*) (C_f) أعلي (Δ) علي المجال $]0;+\infty[$.

5) ننشئ (C_f) و (Δ) علي المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\approx 10,54$$



6) **- أ) تتحقّق أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$:**

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$$

لدينا :

*) $f'(x)=e^{2x+2}(1+2x-e^{-2x-2})$. ومنه :

$$f''(x)=2e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)+e^{2x+2}\left(2+e^{-2x-2}\right)$$
$$=e^{2x+2}(4x+4)$$

*) $f'(x)-f''(x)=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}-4x-4\right)$
$$=e^{2x+2}\left(-e^{-2x-2}-3-2x\right)$$
$$=-1-e^{2x+2}(2x+3)$$

*) في هذه الحالة :

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2-1-e^{2x+2}(2x+3)$$
$$=1-2x+e^{2x+2}(2x-2x-3)$$

إذا من أجل كلّ عدد حقيقي $\mathbb{R}$:

$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

- ب) نستنتج دالّة أصليّة للدّالة f على $\mathbb{R}$.

ممّا سبق ؛ يأتي :

$2f(x)=1-2x-3e^{2x+2}-f'(x)+f''(x)$ أي :

$f(x)=\frac{1}{2}\left[(1-2x)-3\left(e^{2x+2}\right)-f'(x)+f''(x)\right]$.

وعليه :

إذا كانت F هي إحدى الدّوال الأصلية للدّالة f على $\mathbb{R}$ فإنّ F هي دالّة أصلية للدّالة : $x\mapsto\frac{1}{2}\left[(1-2x)-3\left(e^{2x+2}\right)-f'(x)+f''(x)\right]$.

نلاحظ ما يلي :

*) $x\mapsto x-x^2$ دالّة أصلية لـ $x\mapsto 1-2x$

*) $x\mapsto\frac{3}{2}e^{2x+2}$ دالّة أصلية لـ $x\mapsto 3e^{2x+2}$

*) $x\mapsto f(x)$ دالّة أصلية لـ $x\mapsto f'(x)$

*) $x\mapsto f'(x)$ دالّة أصليّة لـ $x\mapsto f''(x)$.

الدّالة F تكون إذا معرّفة كما يلي :

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}-f(x)+f'(x)\right]$$

*) $f'(x)-f(x)=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}-x\right)+x-1$

$$=e^{2x+2}(x+1-e^{-2x-2})+x-1$$

$$=xe^{2x+2}+e^{2x+2}+x-2 .$$

ومنه :

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}+xe^{2x+2}+e^{2x+2}+x-2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x^2+2x-2-\frac{1}{2}e^{2x+2}+xe^{2x+2}\right)$$

$a\in\mathbb{R}^*$.

الدّالة $x\mapsto e^{ax+b}$ تقبل كدالّة أصلية

الدّالة $x\mapsto\left(\frac{1}{a}\right)e^{ax+b}$