حلّ الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:

1) – أ) نعيّن الشكل الأسّي للعدد المركّب z_B .

لدينا ما يلي : $|z_B| = 2$ وبالتالي :

$z_B = 2\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ أي $z_B = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

$z = \left[2;\frac{\pi}{3}\right]$ وهذا معناه $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- ب) نعلّم في المعلم السابق النقطتين A و C ثمّ النقطة B مع الشرح .

* نبدأ بتعليم النقطتين : $A(2;0)$ و $C(2;2)$.

*النقطة B هي نقطة تقاطع الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 2 ($|z_B| = OB = 2$)والمستقيم الذي معادلته $x = 1$ ، $(x_B = 1)$.

(أنظر الشكل في آخر الحل).

2) - أ) نعيّن الشكل الجبري للعدد $Z_{C'}$.

$T(C) = C'$ معناه $z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_C - 2$.

لدينا ما يلي :

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه : $z_{C'} = \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+2i) - 2$

$$= 1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2$$

أي : $z_{C'} = -\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

ب) نبيّن أنّ التحويل النقطي T دوران يطلب تعيين مركزه D ثمّ ننشئ النقطة D

التحويل النقطي T معرّف بعلاقة من الشكل $z' = az + b$

حيث : $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي $a = \left[1;\frac{\pi}{3}\right]$ وبالتالي :

التحويل النقطي T هو الدّوران الذي قيس زاويته $\frac{\pi}{3}$

ومركزه النقطة الصامدة D .

اللاّحقة z_D تحقق: $z_D = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D - 2$ وهذا معناه :

$z_D\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = -2$ أي $z_D\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2$

أي : $z_D = \frac{-4}{1 - i\sqrt{3}}$

وبالتالي : $z_D = -1 - i\sqrt{3}$.

***) إنشاء النقطة D .**

إذا : $|z_D| = 2$ و $x_D = -1$

النقطة D هي تقاطع المستقيم الذي معادلته $x = -1$ والدّائرة ذات المركز O ونصف القطر 2 .

***) تعليم النقطة C' .**

$T(C) = C'$ معناه $\begin{cases} DC = DC' \\ \left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DC'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

إذا : النقطة C' هي نقطة تقاطع الدائرة ذات المركز D ونصف القطر DC والمستقيم (Δ) الموجّه بالشعاع $\overrightarrow{DC'}$ حيث : $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DC'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

- جـ) إيجاد الشكل الجبري للعدد المركّب $\frac{z_{C'}}{z_C}$.

لدينا : $\frac{z_{C'}}{z_C} = \frac{-\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2+2i}$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)(-1+i)}{2(1+i)}$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)(-1+i)(1-i)}{2\times 2}$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)(2i)}{4} .$$

أي : $\frac{z_{C'}}{z_C} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$.

- ب) *) إستنتاج أنّ المثلث OCC' قائم .

حسب ما سبق وجدنا ما يلي : $\frac{z_{C'}}{z_c} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$

ومنه : $\arg\left(\frac{z_{C'}}{z_C}\right) \equiv \arg\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i\right][2\pi]$.

لدينا من جهة : $\arg\left(\frac{z_{C'}}{z_C}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right)[2\pi]$.

من جهة أخري : $\arg\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

وبالتالي : $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ وهذا معناه :

المثلث OCC' مثلّث قائم في O .

***) حساب مساحة المثلّث OCC'**

لتكن S مساحة المثلّث OCC' .

نعلم أن :

$$S=\frac{OC\times OC'}{2}$$
$$=\frac{|z_C|\times|z_{C'}|}{2}$$

لدينا :

* من جهة : $|Z_C|=2\sqrt{2}$

من جهة أخري وبما أنّ $\frac{Z_{C'}}{Z_C}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ ينتج :

$$|Z_{C'}|=|Z_C|\times\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right|$$
$$=2\sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

في هذه الحالة : $S=\frac{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$

أي : $S=\left[2\left(1+\sqrt{3}\right)\right]\times4cm^2$

(واحدة المساحة هي $4cm^2$) .

هـ -) نعين لاحقة النقطة I

نعلم أنّ : $T(I)=O$.

بالرجوع إلي العبارة المركّبة للدوران T نجد :

$Z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}Z_I-2$ معناه $e^{i\frac{\pi}{3}}Z_I=2$

معناه $Z_I=\frac{2}{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$

$Z_I=\frac{4\left(1-i\sqrt{3}\right)}{4}$ أي $Z_I=1-i\sqrt{3}$.

نلاحظ أنّ النقطة I تنطبق علي النقطة B .

3- أ -) نعبّر بدلالة x و y عن الجزء الحقيقي والجزء التّخيلي للعدد المركّب $\frac{z'}{z}$.

$T(M)=M'$ معناه $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z-2$

أي $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+iy)-2$.

في هذه الحالة :

$$\frac{z'}{z}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{2}{x+iy}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{2\left(x-iy\right)}{x^2+y^2}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{z'}{z}=\left(\frac{x^2+y^2-4x}{2\left(x^2+y^2\right)}\right)+i\left(\frac{x^2\sqrt{3}+y^2\sqrt{3}+4y}{2\left(x^2+y^2\right)}\right)$$

وعليه:

$\mathrm{Re}\left(\frac{z'}{z}\right)=\left(\frac{x^2+y^2-4x}{2\left(x^2+y^2\right)}\right)$ و

$\mathrm{Im}\left(\frac{z'}{z}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}\left(x^2+y^2\right)+2y}{2\left(x^2+y^2\right)}\right)$.

ب-) *) نبرّر أنّ المجموعة (E) ،هي جزء من الدائرة (C) المعرّفة بالمعادلة $(x-2)^2+y^2=4$

OMM' مثلّث قائم في O معناه

$\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي

$Arg\left(\frac{z'}{z}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

وبالتالي : $\frac{z'}{z}$ تخيّلي صرف أي $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z'}\right)=0$.

$\mathrm{Re}\left(\frac{z'}{z}\right)=0$ يكافئ $\begin{cases}x^2+y^2-4x=0\\ x\neq0;y\neq0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=2^2...(1)\\ x\neq0;y\neq0\end{cases}$

المعادلة (1) هي معادلة دائرة . إذا :

المجموعة (E) هي جزء من الدائرة المعرّفة بالمعادلة :

$(x-2)^2+y^2=4$

***) ننشئ (C) ثمّ نوضح المجموعة (E) .**

(C) هي الدائرة ذات المركز $A(2;0)$ ونصف القطر 2

(الإنشاء : أنظر الشكل).

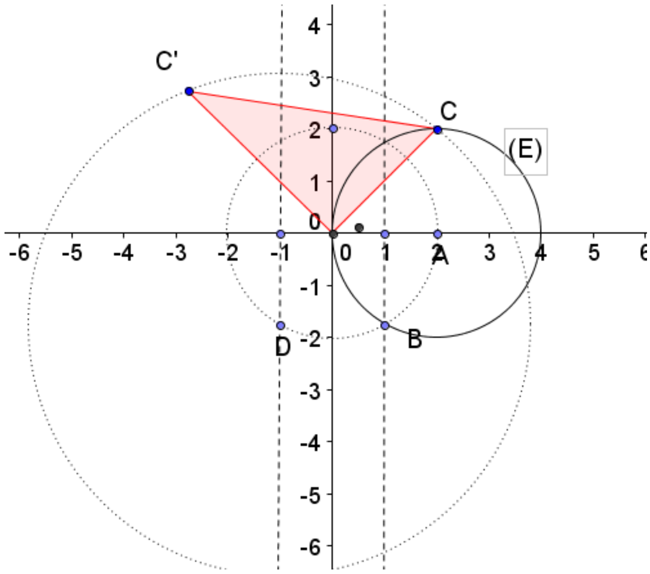
حسب ما سبق : $T(B)=O$.

الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)$ معرفة إذا وفقط إذا

$\overrightarrow{OM}\neq\vec{0}$ و $\overrightarrow{OM'}\neq\vec{0}$ وبالتالي :

$M\neq B$ و $M'\neq O$.

إذا : المجموعة (E) هي الدائرة (C) باستثناء النقطتين O و B



التمرين الثاني :

1) نبرهن أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية .

لدينا ما يلي : $\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2,-5,-3)$.

نلاحظ أنّ $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}$ وهذا معناه :

لا يوجد عدد حقيقي k يحقق : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي :

النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2) – أ) نبرهن أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC) .

لهذا نبيّن أنّ الشعاع $\vec{u}(2,-1,3)$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC) أي $\vec{u}(2,-1,3)$ عمودي على كلّ من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

لدينا :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u} = (1)(2)+(-1)(-1)+(-1)(3) \\ \overrightarrow{AC}.\vec{u} = (2)(2)+(-5)(-1)+(-3)(3) \end{cases}$$

أي $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{u} = 0 \end{cases}$ وبالتالي

$\vec{u}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وهذا معناه :

المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC) .

- ب) استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل :

$ax+by+cz+d=0$.

لدينا :

* من جهة : $\vec{u}(2,-1,3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

المعادلة تصبح : $2x-y+3z+d=0$.

من جهة أخري : $A(0,4,1)$ نقطة من المستوي (ABC).

إذا : $2x_A - y_A + 3z_A + d = 0$ أي $-4+3+d=0$ أي

$d=1$.

$(ABC): 2x-y+3z+1=0$.

- جـ) نعيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) معرّف بالنقطة $D(7,1,-4)$ وشعاع التوجيه $\vec{u}(2;-1;3)$. وعليه :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 4+3t \end{cases}$$.

- د) نعيّن إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (ABC) .

لهذا نحل في $\mathbb{R}$ الجملة ذات المجهول t .

$$\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \\ 2x-y+3z+1=0 ...(*) \end{cases}$$

هذه الجملة مكافئة للمعادلة :

$2(7+2t)-(-1-t)+3(4+3t)+1=0$. أي :

$14+4t+1+t+12+9t+1=0$ يكافئ $14t+28=0$

يكافئ $t=-2$.

بالرجوع إلي التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد :

$H(3,1,-2)$.

3) – أ) نبرهن أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (d) .

لدينا ما يلي :

(*) $\overrightarrow{n_1}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1) .

(*) $\overrightarrow{n_2}(1;4;0)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

نلاحظ ما يلي : $\frac{y_{\overrightarrow{n_1}}}{y_{\overrightarrow{n_2}}} \neq \frac{x_{\overrightarrow{n_1}}}{x_{\overrightarrow{n_2}}}$ أي :

الشعاعان $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ ليسا مرتبطين خطيا وهذا معناه :

المستويان (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (d) .

- ب) نتحقق أنّ الجملة $\begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t+2 \end{cases}$ **هي تمثل وسيطي للمستقيم (d) .**

المستقيم المعرّف بالجملة السابقة هو مجموعة النقط $M(-4t-2;t;3t+2)$ من الفضاء

لهذا نبين أن هذا المستقيم هو جزء من المستويين .

لدينا ما يلي :

$(-4t-2)+t+3t+2=0$ أي $M \in (P_1)$ ... (1)

$-4t-2+4t+2=0$ أي $M \in (P_2)$ ... (2) .

من (1) و (2) ينتج : $(d) \subset (p_1)$ و $(d) \subset (P_2)$.

أي الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (d) .

- جـ) نحددّ الوضع النسبي لـ (d) والمستوي (ABC) .

نحل في $\mathbb{R}$ الجملة ذات المجهول t الآتية :

$$\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \\ 2x-y+3z+1=0 \quad ...(*) \end{cases}$$

بتعويض x ، y و z في المعادلة (*) نجد :

$$2(-4t-2)-(t)+3(3t+2)+1=0$$

أي : $-8t-4-t+9t+6+1=0$ أي $3=0$.

غير ممكن – وهذا معناه :

المستقيم (d) والمستوي (ABC) منفصلان .

التمرين الثالث :

1) حساب $\lim\limits_{x\to \succ 0} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

*) $\begin{cases} (2-\ln x)\to+\infty ; \ln x\to-\infty \\ \ln x\to-\infty \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to\succ 0} f(x)=-\infty$.

*) $\begin{cases} (2-\ln x)\to-\infty ; \ln x\to+\infty \\ \ln x\to+\infty \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2) تتحقّق أنّه من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ ،

$f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.

من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$$f'(x)=-\frac{1}{x}(\ln x)+\frac{1}{x}(2-\ln x)$$
$$=\frac{1}{x}(-\ln x+2-\ln x)$$
$$=\frac{2(1-\ln x)}{x}$$

3) دراسة إشارة $f'(x)$ ثمّ إنشاء جدولا للتغيّرات

من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{2}{x}\succ 0$ وعليه :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-\ln x)$.

لإيجاد إشارة $(1-\ln x)$ نحل في المجال $]0;+\infty[$

المتراجحة $(1-\ln x)\geq 0$.

$1-\ln x\geq 0$ يكافئ $\ln x\leq 1$

يكافئ $x\leq e$

إشارة $f'(x)$ هي إذا كما يلي :

x	0		e		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

*) تشكيل جدول التغيّرات .

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4) نبيّن أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين A و B يطلب تعيينهما .

لهذا نبيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين متمايزين في المجال $]0;+\infty[$.

$f(x)=0$ يكافئ $(2-\ln x)\ln x=0$

يكافئ ($(2-\ln x)=0$ أو $\ln x=0$)

يكافئ ($x=e^2$ أو $x=1$).

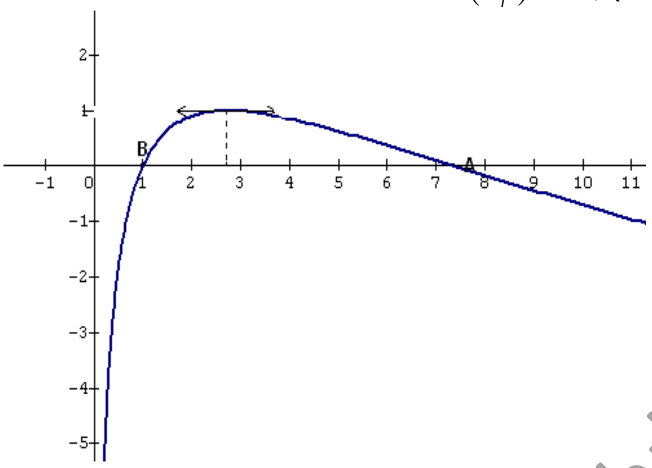
وعليه :

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين

$A(e^2;0)$

و $B(1;0)$.

5) إنشاء (C_f)



التمرين الرابع :

جزء 1:

1) *) ندرس إتجاه تغيّر الدالة h .

الدالة h قابلة للإشتقاق علي $\mathbb{R}$ ولدينا :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $h'(x)=e^x+xe^x$

$=(x+1)e^x$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x\succ 0$ وبالتالي :

إشارة $h'(x)$ من إشارة $(x+1)$.

هذه الإشارة ممثّلة في الشكل الآتي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

الدّالة h هي إذا :

متناقصة تماما علي المجال $]-\infty;-1]$ ومتزايدة تماما علي المجال $[-1;+\infty[$.

***) تتحقّق أنه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$** ، $h(x)\succ 0$

من خلال دراستنا لإتجاه تغيّر الدالة h ، نستنتج أنّ هذه الدّالة تقبل قيمة حدّية صغري من أجل $x=-1$.

أي : من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq h(-1)$.

بما أن $h(-1)=-e^{-1}+1\succ 0$ ينتج :

من اجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\succ 0$.

2) – أ) نعيّن نهايتي g عند $(-\infty)$ وعند $(+\infty)$.

لدينا ما يلي :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \ ; \ \begin{cases}(x-2)\to-\infty\\ e^x\to 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=?\begin{cases}(x+2)\to+\infty\\ e^x\to+\infty\end{cases}$$

لدينا حالة عدم التعيين من الشّكل $(+\infty-\infty)$.
نزيل هذه الحالة .

$g(x)=e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}-1\right)$.

بالإنتقال إلي النهاية نجد :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}-1\right)\right]$$

$$=-\infty \ ; \ \begin{cases}e^x\to+\infty\\ \left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}-1\right)\to-1;\frac{x}{e^x}\to0;\frac{2}{e^x}\to0\end{cases}$$

- ب) دراسة إتجاه تغير الدالة g ثمّ تشكيل جول التعيرات

*) الدالة g قابلة للإشتقاق علي $\mathbb{R}$ ولدينا :
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=1-e^x$.

*) لدراسة إشارة $g'(x)$ نحلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $1-e^x\ge0$.
$1-e^x\ge0$ يكافئ $e^x\le1$.
يكافئ $x\le0$.
إشارة $g'(x)$ ممثّلة في الشكل الآتي :

$-\infty$		0		$+\infty$
	$+$	0	$-$	

الدالة g متناقصة تماما علي المجال $]0;+\infty[$ ومتزايدة تماما علي المجال $]-\infty;0]$.
إذا جدول تغيرات الدالة g يكون كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

- د) نبيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$

من خلال جدول التغيّرات نلاحظ ما يلي :
*) g مستمرّة ومتزايدة تماما علي المجال $]-\infty;0]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1]$ و $0\in]-\infty;1]$.
حسب مبرهنة القيم المتوسطة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا في المجال $]-\infty;0]$ ... (1) .
*) وبالمثل / g مستمرة ومتناقصة تماما علي المجال $]0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1[$ و $0\in]-\infty;1[$.
إذا المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$ ... (2) .

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين .

- هـ) نبرهن أنّ $1{,}14\prec\alpha\prec1{,}15$.
لدينا :
$g(1{,}14)\approx0{,}013$ ، $g(\alpha)=0$ ، $g(1{,}15)\approx-0{,}008$.
نلاحظ أنّ : $g(1{,}15)\prec g(\alpha)\prec g(1{,}14)$.
الدالة g متناقصة تماما علي المجال $]0;+\infty[$ فهي إذا لا تحفظ الترتيب وبالتالي : $1{,}15\succ\alpha\succ1{,}14$.

- و) إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

إتمادا علي جدول التغيرات وبما أنّ $g(\beta)=0$ و $g(\alpha)=0$ فإنّ إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

جزء 2 :

1) *) حساب نهايتي الدالة f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1 \ ; \ \begin{cases}(e^x-1)\to-1;e^x\to0\\ (xe^x+1)\to1;xe^x\to0\end{cases}$$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=? \ ; \ \begin{cases}(e^x-1)\to+\infty\\ (xe^x+1)\to+\infty\end{cases}$$

لدينا حالة عدم التّعيين من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$.
نزيل هذه الحالة :
يمكن كتابة $f(x)$ علي الشّكل التّالي :

$f(x)=\frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})}$ أي $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+1}$

بالإنتقال إلي النهاية نجد :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

$$=0 \ ; \ \begin{cases}(1-e^{-x})\to1;e^{-x}\to0\\ (x+e^{-x})\to+\infty;e^{-x}\to0\end{cases}$$

***) نفسر النتيجتين بيانيا**

المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين افقيين :
- الأوّل معادلته $y=-1$ (بجوار $-\infty$) .
-الثاني هو حامل محور الفواصل(معادلته $y=0$ عند $+\infty$) .

2) – أ)نبيّن أنّهمن أجل كلّ x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{e^x.g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

مناجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{e^x(xe^x+1)-(x+1)e^x(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}$$

أي :

$$f'(x)=\frac{e^x\left[(xe^x+1)-(x+1)(e^x-1)\right]}{(xe^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(xe^x+1-xe^x+x-e^x+1\right)}{(xe^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(x+2-e^x\right)}{(xe^x+)^2}$$

إذا : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{e^x.g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

- ب) *) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي إذا من إشارة $g(x)$ وحسب ما سبق يكون :

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\beta]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$.

*) إنشاء جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$f(\beta)$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

3) *) **نتحقّق أنّ** $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$.

لدينا من جهة :

$f(\alpha)=\frac{e^\alpha-1}{\alpha e^\alpha+1}$.

من جهة أخرى α هو حلّ للمعادلة $g(x)=0$.

$g(\alpha)=0$ معناه $\alpha+2-e^\alpha=0$

معناه $e^\alpha=\alpha+2$.

بتعويض e^α بقيمته نجد :

$f(\alpha)=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}$ أي $f(\alpha)=\frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}$.

أي $f(\alpha)=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}$ وبما أنّ $\alpha\neq-1$ نجد :

$f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$.

<u>ملاحظة :</u>

يمكن إثبات ما يلي : $f(\alpha)-\frac{1}{\alpha+1}=0$.

*) **إيجاد حصر لـ** $f(\alpha)$ **سعته** 10^{-2} .

<u>تذكير</u>: سعة مجال $[a;b]$ هو الفرق $(b-a)$.

إذا كانت هذه السعة هي 10^{-2} فمعناه $b-a=0,01$.

حسب ما سبق وجدنا : $1,14\prec\alpha\prec1,15$ وهذا معناه $2,14\prec\alpha+1\prec2,15$.

الدالة مقلوب متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فهي إذا تعكس الترتيب وبالتالي :

$\frac{1}{2,14}\succ\frac{1}{\alpha+1}\succ\frac{1}{2,15}$ أي $\frac{1}{2,15}\prec f(\alpha)\prec\frac{1}{2,14}$

باستعمال الحاسبة نجد :

$\frac{1}{2,14}\approx0,4651162791$ و $\frac{1}{2,14}\approx0,4672897196$.

نلاحظ ما يلي :

$0,46\prec\frac{1}{2,14}$ و $0,47\prec\frac{1}{2,15}$.وبالتالي يمكن استعمال الحصر الآتي والذي سعته 10^{-2} للعدد α .

نجد : $0,46\prec\alpha\prec0,47$.

4) تعيين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة0

معادلة المماس (T) معطاة بالعلاقة :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

لدينا : $f'(0)=1$ و $f(0)=0$ إذا :

$(T):y=x$

5) – أ) إثبات انّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$:

$f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$.

من اجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا ما يلي :

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x$$

$$=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}$$

$$=\frac{-e^x\left(x^2-1\right)-(x+1)}{xe^x+1}$$

$$=\frac{(x+1)\left[-e^x(x-1)-1\right]}{xe^x+1}$$

أي : $f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$.

-ب) *) دراسة إتجاه تغيّر الدالة u .

الدّالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $u'(x)=e^x-\left[e^x+xe^x\right]$

إذا : من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $u'(x)=-xe^x$

نلاحظ أنّ إشارة $u'(x)$ من إشارة $(-x)$.

هذه الإشارة ممثّلة في الشكل الآتي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	

الدّالة u متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$

*) **إستنتاج إشارة** $u(x)$.

من خلال دراستنا لإتجاه تغيّر الدالة u نلاحظ أن هذه الدّالة تقبل قيمة حدية عظمى من اجل $x=0$.

القيمة $u(0)$ قيمة حدّية عظمى للدّالة u على $\mathbb{R}$.

لدينا : $u(0)=0$ وهذا معناه :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $u(x)\leq 0$.

- جـ) إستنتاج الوضع النّسبي لـ (T) والمنحني (C_f) .

الوضع النسبي لـ (T) و (C_f) مرتبط بإشارة الفرق $f(x)-x$.

إشارة هذا الفرق ملخّصة في الجدول الموالي :

حسب ما سبق :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\succ 0$ أي :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $(xe^x+1)\succ 0$ وبالتالي :

إشارة الفرق $\left[f(x)-x\right]$ من إشارة الجداء $(x+1)u(x)$.

هذه الإشارة ملخّصة في الجدول الآتي :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$u(x)$		$-$		$-$	0	$-$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

الوضع النّسبي للمماس (T) و (C_f) يكون كما يلي :

1) (T) يمس (C_f) عند مبدأ الإحداثيات ويشترك معه في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;-1)$.

2) (C_f) أعلى (T) في المجال $]-\infty;-1[$.

3) (C_f) أسفل (T) في كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$.

6) إنشاء (T) و (C_f) .