حلّ الموضوع رقم 2

التمرين الأوّل :

1) نحلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-2i)(z^2+2z\sqrt{3}+4)=0$

المعادلة مكافئة لـ : $\left[\begin{array}{l} z-2i=0\ ;\ z=2i \\ z^2+2z\sqrt{3}+4=0 ...(1) \end{array}\right.$.

نحلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة (*) .

*) حساب المميّز Δ .

$$\Delta=\left(2\sqrt{3}\right)^2-4\times 4$$
$$=-4$$

أي $\Delta=(2i)^2$ ، $(2i)$ جذر تربيعي لـ (Δ) .

للمعادلة (*) حلاّن مترافقان z_1 و z_2 حيث :

$z_1=\frac{-2\sqrt{3}+2i}{2}$ أي $z_1=-\sqrt{3}+i$.

$z_2=\overline{z_1}=-\sqrt{3}-i$.

إذا كانت S هي مجموعة حلول المعادلة المعطاة فإنّ:

$S=\left\{2i;-\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}-i\right\}$.

2) – أ) نعيّن الطويلة وعمدة لكلّ من z_A و z_B .

*) لدينا : $|z_A|=2$.

يمكن كتابة z_A على الشكل :

$$z_A=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right] .$$

$=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$ أي $z_A=\left[2;\frac{5\pi}{6}\right]$.

*) $z_B=\overline{z_A}$ معناه $z_B=\left[2;-\frac{5\pi}{6}\right]$ أو $z_B=\left[2;\frac{7\pi}{6}\right]$.

- ب) نبيّن أنّ كلّ من النقطتين A و B هي نقطة من دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

لدينا : $z_A=\overline{z_B}$ ومنه $|z_A|=|z_B|$.

حسب المفهوم الهندسي للطّويلة ينتج : $OA=OB$.

وهذا معناه :

كلّ من النقطتين A و B هي نقطة من الدّائرة (C) ذات المركز O ونصف القطر 2 .

- ننشئ في المعلم السابق النقطتين A و B .

*) النقطة A هي نقطة تقاطع الدائرة (C) والمستقيم الذي معادلته $y=1$ ، $(y_A=1)$.

*) النقطة B هي نظيرة النقطة A بالنسبة على حامل محور الفواصل .

(أنظر الشكل : آخر التمرين).

3) – أ) نتحقّق أنّ $2i$ هو الحلّ الوحيد للمعادلة (1) .

لدينا :

(1) تكافئ $2z-iz=4i+2$.

تكافئ $z(2-i)=2+4i$

تكافئ $z=\frac{2+4i}{2-i}$.

تكافئ $z=\frac{(2+4i)(2+i)}{5}$ أي $z=\frac{4+2i+8i-4}{5}$

$=2i$.

إذا الحلّ الوحيد للمعادلة (1) هو $2i$.

ملاحظة : التحقق أنّ $2i$ حلّ للمعادلة لا يبرّر وحدانية هذا الحلّ .

- ب) *) تعليم النقطة C .

$C(0;2)$ ، أنظر الشّكل

***) إثبات أنّ الرباعي $OBAC$ معيّن .**

يكفي أن نبيّن مثلا ما يلي :

$OBAC$ متوازي أضلاع و قطراه $[OA]$ و $[BC]$ متعامدان .

*) لدينا : $\begin{cases} z_{\overline{OB}}=z_B=-\sqrt{3}-i \\ z_{\overline{CA}}=z_A-z_C=-\sqrt{3}-i \end{cases}$

$z_{\overline{OB}}=z_{\overline{OC}}$ يكافئ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

يكافئ $OBAC$ متوازي أضلاع ... (1).

*) $\overrightarrow{OA}\left(-\sqrt{3};1\right)$ و $\overrightarrow{BC}(\sqrt{3};3)$.

نلاحظ أنّ : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}=\left(-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\right)+(1)(3)$.

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}=0$ معناه $(OA)\perp(BC)$ ... (2) .

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي $OBAC$ معيّن.

4) – أ) كتابة العدد المركّب α على الشكل الاسّي.

حسب السؤال 2) – أ) وجدنا ما يلي :

$z_A=\left[2;\frac{5\pi}{6}\right]$ و $z_B=\left[2;\frac{7\pi}{6}\right]$.

في هذه الحالة :

$\frac{z_B}{z_A}=\left[\frac{2}{2};\frac{7\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right]$ أي $\frac{z_B}{z_A}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$.

ومنه : $\alpha=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- ب) إستنتاج الكتابة الجبرية للعدد α^9

حسب دستور موافر لدينا :

معناه $\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\alpha^9=\left(\cos\frac{9\pi}{3}+i\sin\frac{9\pi}{3}\right)$

معناه $\alpha^9=\left(\cos(3\pi)+i\sin(3\pi)\right)$

بما أنّ π هو القيس الرئيسي المرفق بالقيس 3π :

$\alpha^9=(\cos\pi+i\sin\pi)$ أي $\alpha^9=-1$.

5) *) نعيّن الطبيعة الهندسية للمجموعة(E) .

$M\in(E)$ معناه $|z-2i|=\left|z-\left(-\sqrt{3}-i\right)\right|$

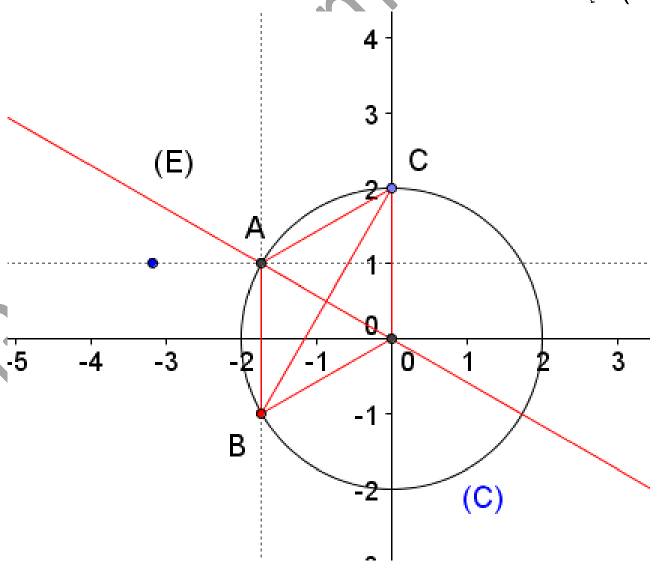
معناه $|z_M-z_C|=|z_M-z_B|$.

معناه $MC=MB$.

إذا : المجموعة (E) هي محور القطعة المستقيمة $[BC]$

أي : $(E)=(OA)$.

*) الإنشاء .



التمرين الثاني :

1) – أ) نبيّن أنّ النقط A ، B ، C تحدّد مستويا .

لهذا نبيّن مثلا أن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ليس مرتبط خطّيا مع الشعاع $\overrightarrow{AC}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$.

نلاحظ أنّ : $\frac{y_{AB}}{y_{AC}}\neq\frac{z_{AB}}{z_{AC}}$ ، $\left(\frac{2}{2}\neq\frac{-2}{1}\right)$.

وهذا معناه : لا يوجد عدد حقيقي k : $\overrightarrow{AB}=k\times\overrightarrow{AC}$.

و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعان ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي ك النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تحدّد إذا المستوي (ABC) .

- ب) نتحقّق أنّ إحدي المعادلات الديكارتية للمستوي للمستوي (ABC) هي : $2x-2y+2z+2=0$.

لدينا :

$$\begin{cases}2x_A-y_A+2z_A+2=2(-2)-2(0)+2(1)=0\\2x_B-y_B+2z_B+2=2(1)-2(2)+2(-1)+2=0\\2x_C-y_C+2z_C+2=2(-2)-2(2)+2(2)+2=0\end{cases}$$

إحداثيات النقط A ، B و C حلّ لمعادلة المستوي .

إذا : المعادلة $2x-y+2z+2=0$ هي إحدي المعادلات الديكارتية للمستوي (ABC) .

2) نبيّن أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق المستقيم (D) المعرّف بتمثيله الوسيطي :

*) نبين أنّ (P_1) و (P_2) متقاطعان :

- $\overrightarrow{n_1}(1;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1) .

- $\overrightarrow{n_2}(1;-2;6)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

نلاحظ أنّ $\frac{x_{\overrightarrow{n_1}}}{x_{\overrightarrow{n_2}}}\neq\frac{y_{\overrightarrow{n_1}}}{y_{\overrightarrow{n_2}}}$ وهذا يعني :

$\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ ليسا مرتبطين خطّيا وبالتالي (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم .

*) نبين أنّ هذا المستقيم هو (D) .

المستقيم (D) هو مجموعة النقط $M(-2;-1+3t;t)$.

لدينا من جهة :

$x_M+y_M-3z_M+3=-2-1+3t-3+3..$

$=0$ أي $M\in(P_1)$

إذا $(D)\subset(P_1)$

ثمّ : $x_M-2y_M+6z_M=-2+2-6t+6t$

$=0$ أي $M\in(P_2)$

إذا $(D)\subset(P_2)$.

مما سبق نستنتج أنّ المستقيم (D) هو تقاطع المستويين (P_1) و(P_2) .

4) – أ) إيجاد معادلة ديكارتية لسطح الكرة(S) .

معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز $\Omega(1;-3;1)$ ونصف القطر 3 هي :

$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$.

- ب) دراسة تقاطع سطح الكرة (S) والمستقيم(D) .

لهذا نحل في $\mathbb{R}$ الجملة :

$$\begin{cases}x=-2\\y=-1+3t\\z=t\\(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9\end{cases}$$

هذه الجملة مكافئة للمعادلة :

$(-3)^2+(2+3t)^2+(t-1)^2=9$ ... (1)

(1) تكافئ $(2+3t)^2+(t-1)^2=0$

تكافئ $\left(t=-\frac{3}{2}\right)$ و $(t=1)$. غير ممكن .

وعليه :

(S) و (D) مجموعتا منفصلتان .

- جـ) نبرهن أنّ المستوي (ABC) يمسّ (S) .

لهذا نبيّن أنّ $d(\Omega;(ABC))=r$.

لدينا : $d(\Omega;(ABC))=\frac{|2(1)-(-3)+2(1)+2|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}}$

$=\frac{9}{3}$

$=3$

المسافة بين مركز سطح الكرة (S) والمستوي (ABC) يساوي نصف القطر . وبالتالي :

المستوي (ABC) وسطح الكرة (S) متماسّان .

التمرين الثّالث :

1) باستعمال مبدأ الإستدلال بالتّراجع، نبيّن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n \succ -3$

نضع : $P(n): u_n \succ -3 \quad , n\in\mathbb{N}$

أ) تتحقّق من صحّة $P(0)$.

لدينا فرضا : $u_0=3$ إذا $u_0\succ -3$. ومنه :

$P(0)$ صحيحة .

ب) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي نفرض ما يلي : $u_n \succ -3$ ونبيّن صحّة $P(n+1)$ أي نبيّن أن $u_{n+1}\succ -3$.

* حسب فرضية التّراجع لدينا : $u_n \succ -3$ وبالتالي :

$\frac{2}{3}u_n \succ \frac{2}{3}(-3)$ أي $\frac{2}{3}u_n-1\succ -2-1$ أي $u_{n+1}\succ -3$.

وعليه : $P(n+1)$ صحيحة .

مما سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتراجع ، نستنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n\succ -3$.

2) نبرهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

لهذا نبرهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n\succ 0$.

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n-1-u_n$

$=-\frac{1}{3}u_n-1$

$=-\frac{1}{3}(u_n+3)$.

حسب السّؤال السّابق : $u_n\succ -3$ معناه $u_n+3\succ 0$

$u_n+3\succ 0$ معناه $-\frac{1}{3}(u_n+3)\prec 0$

أي ك من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n\succ 0$.

إذا : المتتالية (u_n) متناقصة تماما في $\mathbb{N}$.

3) - أ)نبيّن أنّ $\lim_{x\to+\infty}(v_0+v_1+...+v_n)=\frac{v_0}{1-q}$.

المجموع $(v_0+v_1+v_2+...+v_n)$ هو مجموع $(n+1)$ حدّا الأولي من المتتالية الهندسية (v_n) . ومنه :

$v_0+v_1+...+v_n=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$.

في هذه الحالة ينتج :

$$\lim_{x\to+\infty}(v_0+v_1+...+v_n)=\lim_{x\to+\infty}v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$=\frac{v_0}{1-q};(q^{n+1}\to 0)$$

(المتتالية الهندسية متقاربة : $(-1\prec q\prec 1)$).

- ب) * حساب الأساس q (بدلالة v_0)

حسب ما سبق : $\frac{v_0}{1-q}=18$ معناه $1-q=\frac{v_0}{18}$

معناه $q=\left(1-\frac{v_0}{18}\right)$.

***) التعبير عن v_n بدلالة n .**

عبارة v_n معطاة بالعلاقة : $v_n=v_0\times q^n$ أي :

$v_n=v_0\left(1-\frac{v_0}{18}\right)^n$.

3) – أ) تحديد عبارة الحدّ العامّ للمتتالية (u_n)

بما أنّ $v_n=u_n+3$ فإنّ $u_n=v_n-3$.

بالتعويض نجد :

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $u_n=v_0\left(1-\frac{v_0}{18}\right)^n-3$.

- ب) نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا : المتتالية (v_n) متتالية متقاربة وتتقارب نحو 0

ومنه : (u_n) متقاربة وتتقارب نحو (-3) .

أي : $\lim_{x\to+\infty}u_n=-3$.

التّمرين الرّابع :

جزء 1 :

1) ندرس تغيّرات الدّالة g ثمّ نشكّل جدولا للتّغيّرات.

*) حساب النّهايتين:

$$\lim_{x \to 0^{\succ}} g(x) = +\infty \; ; \; \left(\frac{2}{x} \to +\infty ; -\ln x \to +\infty\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \; ; \; \left(\frac{2}{x} \to 0 ; -\ln x \to -\infty\right)$$

*) الدّالة المشتقّة وإشارتها .

الدّالة g قابلة للإشتقاق علي المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$g'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$ أي $g'(x) = -\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$.

من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x) \prec 0$

*) تشكيل جدول تغيّرات الدّالة g .

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2) – أ) نبرهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α **يحقق** $g(\alpha) = 0$.

من خلال جدول التّغيّرات نلاحظ ما يلي :

الدّالة g مستمرّة ومتناقصة تماما علي المجال $]0;+\infty[$

وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$.

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة ، يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقّق : $g(\alpha) = 0$.

- ب) إثبات الحصر الآتي: $2,3 \prec \alpha \prec 2,4$.

لدينا:

$g(2,3) \approx 0,036$ ، $g(\alpha) = 0$ و $g(2,4) \approx -0,042$.

نلاحظ أن الدّالة g متناقصة تماما على مجموعة تعريفها فهي لا تحفظ التّرتيب وعليه :

$2,3 \prec \alpha \prec 2,4$

- جـ) إستنتاج إشارة $g(x)$.

حسب جدول التغيّرات وبما أنّ $g(\alpha) = 0$ فإنّ إشارة $g(x)$ تكون كما يلي :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

جزء 2 :

1) – أ) *) حساب $\lim_{x \to 0^{\succ}} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0^{\succ}} f(x) = -\infty \; ; \; \begin{cases} (2-x) \to 2 ; \ln x \to -\infty \\ (2-x)\ln x \to -\infty \end{cases}$$

***) التفسير البياني**

في جوار $(-\infty)$ ، حامل محور التراتيب مستقيم مقارب.

- ب) تتحقّق أنّه من اجل كلّ عدد حقيقي $x \succ 0$ ،

$f(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} - x + 1\right)$.

لدينا ومن اجل كلّ $x \succ 0$:

$$x\left(\frac{2\ln x}{x} - \ln x + 1\right) = 2\ln x - x\ln x + x$$

$$= (2-x)\ln x + x$$

$$= f(x)$$

***) إستنتاج** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \; ; \; \begin{cases} \frac{\ln x}{x} \to 0 ; (-x+1) \to +\infty \\ x \to +\infty \end{cases}$$

2) – أ) إنطلاقا من $g(\alpha) = 0$ ، **نبيّن أنّ** $\ln\alpha = \frac{2}{\alpha}$

$g(\alpha) = 0$ معناه $\frac{2}{\alpha} - \ln\alpha = 0$

معناه $\ln\alpha = \frac{2}{\alpha}$.

- ب) نستنتج أنّ $f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{4}{\alpha}$.

لدينا : $f(\alpha) = (2-\alpha)\ln\alpha + \alpha$ ومنه وبتعويض $\ln\alpha$ بقيمته نجد : $f(\alpha) = (2-\alpha)\left(\frac{2}{\alpha}\right) + \alpha$

$$= \frac{4}{\alpha} - 2 + \alpha$$

أي : $f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{4}{\alpha}$.

3) *) دراسة إتّجاه تغيّر الدّالة f .

***** الدّالة f قابلة للإشتقاق علي المجال $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x) = -\ln x + \frac{1}{x}(2-x) + 1$$

$$= -\ln x + \frac{2}{x} - 1 + 1$$

أي من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$

وبالتّالي : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

إذا:

f متزايدة تماما علي المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما علي المجال $[\alpha;+\infty[$.

***) تشكيل جدول تغيّرات الدّالة** f .

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4) كتابة معادلة المماس (T) عند النّقطة التّي فاصلتها 0 .

معادلة المماس (T) معطاة بالعلاقة :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

لدينا : $\begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ بالتعويض نجد :

$$(T) : y = 2x - 1$$

5) إنشاء (T) و (C_f) .

*) (T) يمس (C_f) في النقطة $A(1;1)$ ويمرّ بالنقطة ذات الإحداثيتين $(0;-1)$.