حلّ الموضوع رقم 4.

التمرين الأول :

نجيب إمّا "صحيح " وإمّا " خاطئ " مع التعليل .

1) النقط A ، B و C تعيّن مستويا ...صحيح

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-4;-1;7)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;4;2)$.

بما أنّ $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}$ فإنّه لا يوجد عدد حقيقي k يحقّق:

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ وهذا معناه :

الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقلّان خطّيا .

النّقط A ، B و C ليست في استقامية فهي إذا تحدّد المستوي (ABC) .

2) المستوي (P) هو نفسه المستوي (ABC) ... صحيح

لدينا :

$$\begin{cases} 2x_A - y_A + z_A + 3 = 2-2-3+3=0 \\ 2x_B - y_B + z_B + 3 = -6-1+4+3=0 \\ 2x_C - y_C + z_C + 3 = 4-6-1+3=0 \end{cases}$$ أي

إحداثيات النّقط A ، B و C حلّ لمعادلة المستوي (P)

وبما أنّ هذه النّقط ليست في استقامية فإنّ المستوي (P) هو نفسه المستوي (ABC) .

3) $-2x+y+z-3$ هي معادلة للمستوي الّذي يشمل النّقطة A و $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي له ...خاطئ

نلاحظ ما يلي :

الشّعاع $\vec{n}'(-2;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي المعطى .

$\frac{x_{\vec{n}}}{x_{\vec{n}'}} \neq \frac{y_{\vec{n}}}{y_{\vec{n}'}}$ أي $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ليسا مرتبطين خطّيا وبالتّالي :

الشّعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ ليس شعاعا ناظميا لهذا المستوي.

ملاحظة : يمكن كتابة معادلة ديكارتية للمستوي المعرّف بالنقطة A والشّعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ والتّحقّق بعد ذلك أنّ المعادلة النّاتجة والمعادلة المعطاة ليستا متكافئتين .

4) النّقطة $H(-1;1;0)$ هي المسقط العمودي للنّقطة $D(1;0;1)$ على المستوي (P) . ... صحيح

يمكن إتباع إحدى الطّريقتين :

*) ننظر إن كانت H نقطة من (P) ثمّ بعد ذلك ننظر إن كان الشّعاع $\overrightarrow{DH}$ ناظمي للمستوي (P) .

لدينا :

(1) $$2x_H - y_H + z_H + 3 = -2-1+0+3 = 0$$

أي $H \in (P)$.

(2) $\overrightarrow{DH}(-2;1;-1)$.

$\vec{n}_{(P)}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

واضح أنّ $\overrightarrow{AH}$ و $\vec{n}_{(P)}$ مرتبطان خطّيا .

من (1)و (2) نستنتج أنّ $H(-1;1;0)$ هي المسقط العمودي للنّقطة $D(1;0;1)$ على المستوي (P) .

**) نقارن بين المسافة DH و المسافة $d(D;(P))$

لدينا : $$DH = \sqrt{(-2)^2+(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$

و $$d(D;(P)) = \frac{|2x_D - y_D + z_D + 3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(1)^2}} = \frac{|2-0+1+3|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

بما أن $AH = d(D;(P))$ فإنّ $H(-1;1;0)$ هي المسقط العمودي للنّقطة $D(1;0;1)$ على المستوي (P) .

5) $d(D;(P))=3$ (أي أنّ المسافة بين النّقطة D والمستوي (P) تساوي . ... خاطئ

(أنظر التّبرير أعلاه).

6) المستقيم (OB) محتوى في المستوي (P) ... خاطئ

ننبّه إلى ما يلي :

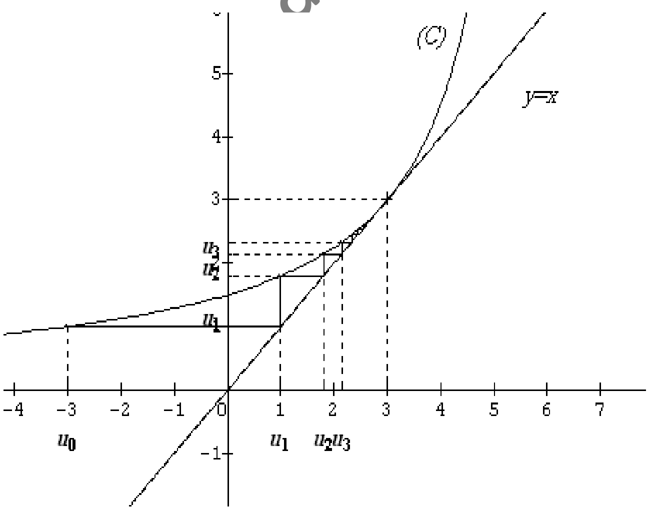
كلّ معادلة من الشّكل $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b و c حيث a ، b و c أعداد حقيقية ليست كلّها معدومة هي معادلة ديكارتية لمستو حيث الشّعاع $\vec{n}(a;b;c)$ هو شعاع ناظمي له .

وفي حالة $d=0$ فإنّ هذا المستوي يشمل مبدأ الإحداثيات

إذا $O \notin (P)$ $(OB) \not\subset (P)$.

التّمرين الثّاني :

1) ننقل بعناية الشّكل ثمّ على حامل محور الفواصل نعلّم الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .



2) التخمين حول نهاية ورتابة المتتالية (u_n)

من خلال التمثيل البياني نلاحظ ما يلي :

*) $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

**) حدود المتتالية تقترب من فاصلة نقطة تقاطع (C) مع المستقيم (Δ) .

المتتالية (u_n) متقاربة .

3) – أ) إثبات أنّه إذا كان $x<3$ فإن $f(x)<3$.

لدينا : $x<3$ ومنه $-x>-3$ وبالتّالي $6-x>3$

الدّالة مقلوب متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ومنه :

$\frac{1}{6-x}<3$. إذا : $\frac{9}{6-x}<3$.

أي : إذا كان $x<3$ فإن $f(x)<3$.

- ب) نستنتج أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $u_n<3$.

نستعمل مبدأ الإستدلال بالتّراجع .

نضع : $P(n): u_n<3$.

*) نتحقّق من صحّة $P(0)$.

لدينا فرضا $u_0=-3$ إذا : $u_0<3$.

$P(0)$ صحيحة إذا .

**) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أنّ $u_n<3$ ونبيّن صحّة $P(n+1)$ أي نبيّن ما يلي : $u_{n+1}<3$.

حسب فرضيّة التّراجع لدينا : $u_n<3$ ومنه $f(u_n)<3$

أي $u_{n+1}<3$.

$P(n+1)$ صحيحة.

ممّا سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتّراجع نستنتج ما يلي :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n<3$.

- جـ) ندرس إتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

لهذا ندرس في $\mathbb{N}$ إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$.

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{9}{6-u_n}-u_n$$

أي
$$=\frac{u_n^2-6u_n+9}{(6-u_n)^2}$$

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$

بما أنّ $u_n<3$ فإنّ $\begin{cases}(u_n-3)^2>0\\6-u_n>0\end{cases}$ وعليه :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n>0$.

المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

- د) - *) نستنتج أن (u_n) تتقارب نحو عدد حقيقي l .

المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3 $(u_n<3)$

و متزايدة تماما .

إذا (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد حقيقي l .

****) نعيّن l .**

نعلم أنّه إذا قبلت متتالية نهاية فإنّ هذه النّهاية وحيدة

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=l$.

في هذه الحالة : $l=\frac{9}{6-l}$ ... (1)

------------ عموما : إذا كانت متتالية (u_n) متقاربة نحو l

وكانت معرّفة بعلاقة من الشّكل $u_{n+1}=f(u_n)$ فإن العدد

l هو حلّ للمعادلة : $f(l)=l$.

(1) تكافئ $-l^2+6l-9=0$

تكافئ $(l-3)^2=0$

تكافئ $l=3$.

إذا : $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=3$.

4) – أ) نبرهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب كتابة عبارة حدّها العامّ

*) لدينا ومن أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-3}-\frac{1}{u_n-3}$$

$$=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}-\frac{1}{u_n-3}$$

$$=\frac{u_n-3}{3u_n-9}-\frac{1}{u_n-3}$$

$$=\frac{6-u_n}{3u_n-9}-\frac{3}{3u_n-9}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{-(u_n-3)}{3(u_n-3)}\ .$$

إذا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}$.

وهذا معناه : المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها

$r=-\frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-3}$ أي $v_0=-\frac{1}{6}$.

**** عبارة الحدّ العامّ للمتتالية (v_n) .**

(v_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل v_0 وأساسها r .

عبارة الحدّ العامّ معطاة بالعلاقة :

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $v_n = v_0 + n.r$.

بالتّعويض نجد : $v_n = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n$.

أي : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{-2n-1}{6}$

- ب) *) إيجاد عبارة الحدّ العامّ للمتتالية (u_n) .

من العلاقة : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ نجد $v_n(u_n-3)=1$

معناه $u_n = \frac{3v_n+1}{v_n}$.

وبالتّعويض :

$$u_n = \frac{\frac{3(-2n-1)}{6}+1}{\frac{-2n-1}{6}} = \frac{-6n-3+6}{-2n-1}$$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{6n-3}{2n+1}$.

*) نتحقّق من قيمة l المحصّل عليها سابقا.

المتتالية (u_n) معرّفة بعلاقة من الشّكل : $u_n = g(n)$.

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x}{2x}\right) = 3$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 3$.

<u>التّمرين الثّالث :</u>

1) – أ) كتابة كل من a ، b و c على شكله الجبري .

لدينا ما يلي :

*) $a = \frac{-3+i}{1+i} = \frac{(-3+i)(1-i)}{2}$ أي $a = \frac{-3+4i+1}{2}$

$a=-1+2i$

*) يمكن لحساب b استعمال دستور موافر.

لدينا : $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

ومنه : $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^3 = \left[\cos\left(-3\times\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-3\times\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -i$$

في هذه الحالة : $b = i(-i)$ أي $b=1$.

*) $c = \frac{-7+i}{1-3i} = \frac{(-7+i)(1+3i)}{10}$ أي $c=\frac{-7-21i+i-3}{10}$

$c=-2+10i$.

2) – أ) *) حساب $P(b)$.

$P(b)=P(1) = (1)^3+(1)^2+3(1)-5$ ومنه $P(b)=0$.

***) تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون**

من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-1)(z^2+\alpha z+\beta)$.

لدينا ومن أجل كلّ z من $\mathbb{C}$:

$$(z-1)(z^2+\alpha z+\beta) = z^3+(\alpha-1)z^2+(\beta-1)z-\beta$$

بالمطابقة نحصل على الجملة :

$$\begin{cases}\alpha-1=1\\ \beta-\alpha=3\\ -\beta=-5\end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=5\end{cases}$$

إذا من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$:

$P(z)=(z-1)(z^2+2z-5)$.

- ب) نحلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

$P(z)=0$ يكافئ $(z-1)(z^2+2z+5)=0$

يكافئ $\left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2+2z+5=0 \quad ...(1)\end{array}\right.$

نحلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) .

مميّز هذه المعادلة هو Δ .

$\Delta=-16$.

للمعادلة (1) حلاّن مترافقان z_1 و z_2 حيث:

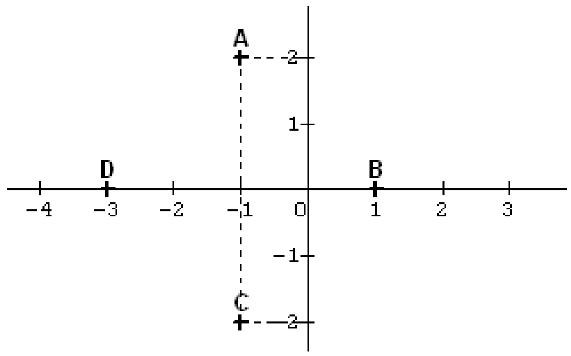
$z_1=\frac{-2+4i}{2}$ أي $z_1=-1+2i$

$z_2=\overline{z_1}=1-2i$.

إذا كانت S مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ فإنّ :

$S=\{1;-1+2i;-1-2i\}$.

3) – أ) إنشاء النّقط A ، B و C



- ب) تعيين لاحقة النّقطة D .

نبدأ مثلا بتعيين العبارة المركّبة للتّشابه S .

S معرّف بعلاقة من الشّكل : $z'=az+b$.

* $a=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$ إذا $a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$a=1+i$

في هذه الحالة ، العبارة تصبح : $z'=(1+i)z+b$.

* بما أن المركز B نقطة صامدة فإنّ لاحقة النّقطة B

تحقق : $z_B=\frac{b}{1-a}$ أي $b=z_B(1-a)$.

بالتّعويض نجد : $b=-i$.

وعليه العبارة المركّبة لـ S هي : $z'=(1+i)z-i$.

* في هذه الحالة :

$S(A)=D$ معناه $z_D=(1+i)z_A-i$

$$=(1+i)(-1+2i)-i$$

$$z_D=-3$$

<u>التّمرين الرّابع :</u>

1) حساب نهايات الدّالة f .

$D_f=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3}{4x^2}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(4x)$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{1}{2}}f(x)=+\infty;\begin{cases}(4x^3-12x^2+9x)\to 2\\(2x-1)^2\to 0^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}f(x)=+\infty;\begin{cases}(4x^3-12x^2+9x)\to 2\\(2x-1)^2\to 0^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(4x)$$
$$=+\infty$$

2) تعيين العددين a **و** b .

لكون f دالّة ناطقة بدلا من طريقة المطابقة يمكن إستعمال طريقة القسمة الإقليدية .

$$\begin{array}{r|l}4x^3-12x^2+9x & 4x^2-4x+1\\ \hline -4x^3+4x^2-x & x-2\\ -8x^2+8x & \\ 8x^2+-8x+2 & \\ 2 & \end{array}$$

وعليه :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ، $f(x)=x-2+\frac{2}{(2x-1)^2}$

أي $a=-2$ و $b=2$

3) – أ) *) حساب $\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{2}{(2x-1)^2}\ .$$
$$=0$$

***) التّفسير البياني .**

بيانيا وفي جواري $(+\infty)$ و $(-\infty)$ المستقيم الّذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب لـ (C) .

- ب) دراسة الوضع النّسبي لـ (C) **و** (d) .

لهذا ندرس في D_f إشارة الفرق $f(x)-(x-2)$.

وجدنا : $f(x)-(x-2)=\frac{2}{(2x-1)^2}$.

من أجل كل x من D_f : $\left[f(x)-(x-2)\right]\succ 0$.

إذا : (C) أعلي (d) .

4) – أ) نبيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$:

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(4x^2+3)}{(2x-1)^3}$$

لدينا : $f'(x)=1-\frac{2\times 4(2x-1)}{(2x-1)^4}$

$$=\frac{(2x-1)^4-8(2x-1)}{(2x-1)^4}$$

$$=\frac{(2x-1)\left[(2x-1)^3-8\right]}{(2x-1)^4}$$

$$=\frac{\left[(2x-1)^3-8\right]}{(2x-1)^3}\ .$$ لأن $x\neq\frac{1}{2}$

نعلم أنّه من أجل كلّ عددين حقيقيين a و b :

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$(2x-1)^3-8=(2x-1)^3-2^3$$
$$=\left[(2x-1)-2\right]\left[(2x-1)^2+2(2x-1)+2^2\right]$$
$$=(2x-3)(4x^2-4x+1+4x-2+4)$$
$$=(2x-3)(4x^2+3)$$

إذا : $f'(x)=\frac{(2x-3)(4x^2+3)}{(2x-1)^3}$.

- ب) *) دراسة إتّجاه تغيّر الدّالة f .

يمكن كتابة $f'(x)$ كما يلي :

$$f'(x)=\frac{(2x-3)}{(2x-1)}\times\frac{(4x^2+3)}{(2x-1)^2}\ .$$

من اجل كل x من D_f : $\begin{cases}4x^2+3\succ 0\\(2x-1)^2\succ 0\end{cases}$. إذا :

إشارة $f'(x)$ في D_f من إشارة كثير الحدود $(2x-3)(2x-1)$.

هذه الإشارة ممثّلة في الشّكل الآتي :

$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
	+	‖	−	0	+	

* f متزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و $\left[\frac{3}{2};\infty\right[$ و

* f متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$

*) تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f .

إعتمادا على النتائج السّابقة ، جدول تغيّرات الدّالة f يكون كما يلي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

5) أ –) **كتابة معادلة المماس** (Δ) .

معادلة المماس (Δ) عند النّقطة ذات الفاصلة 0 معطاة بالعلاقة : $y=f'(0)\times x+f(0)$.

بالتعويض نجد : $(\Delta): y=9x$.

- ب) - *) نعيّن إحداثيات نقط تقاطع (C) مع حاملي المحورين.

* مع حامل محور الفواصل :

نحلّ في D_f المعادلة $f(x)=0$.

$f(x)=0$ يكافئ $4x^3-12x^2+9x=0$

يكافئ $x(4x^2-12x+9)=0$

يكافئ $x(2x-3)^2=0$.

يكافئ ($x=0$ أو $x=\frac{3}{2}$).

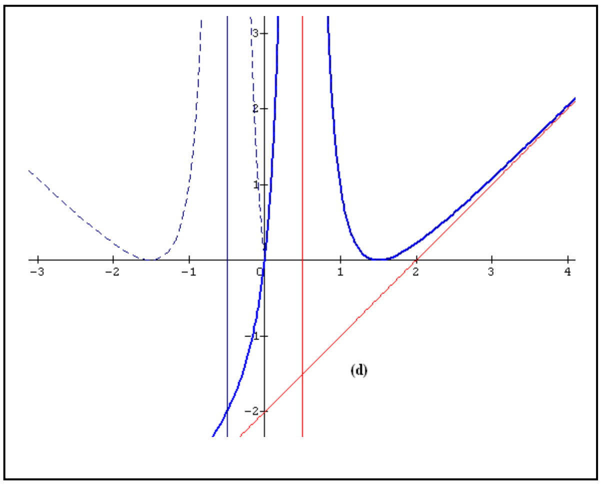
(C) يقطع حامل محور الفواصل في المبدأ O وفي النّقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{3}{2};0\right)$.

* مع حامل محور التّراتيب :

$0\in D_f$ و $f(0)=0$.

(C) يقطع حامل محور التّراتيب في المبدأ.

*) إنشاء (C)



6) أ –) نبيّن أنّ g دالّة زوجية.

*) مجموعة التّعريف متناظرة بالنّسبة للعدد 0 .

*)ثمّ : $g(-x)=\frac{4|-x|^3-12(-x)^2+9|-x|}{(2|-x|-1)}$

$=g(x)$ لأنّ $|-x|=|x|$.

- ب) كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

نعلم أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$:

$\begin{cases}|x|=-x;\ x\ge 0\\|x|=x;\ \ x\ge 0\end{cases}$. في هذه الحالة :

$$\begin{cases}g(x)=\frac{-4x^3-12x^2-9x}{(2x+1)^2};x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};0\right]\\g(x)=f(x);x\in\left[0;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};\infty\right[\end{cases}$$

- جـ)تشكيل جدول تغيّرات الدّالة g وإنشاء (C') .

للدالتين f و g نفس إتّجاه التغيّر على المجالين $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ (إنشاء (C') : أنظر الشّكل أعلاه)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$