حلّ الموضوع رقم3.

التمرين الأوّل:

1) – أ) نبيّن أنّ النّقط A ، B ، C تحدّد مستويا .

لدينا ما يلي : $\overrightarrow{AB}(2;0;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0;1;1)$.

تلاحظ أنّ : $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$ وهذا يعني أنّ الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطّيا وبالتّالي :

النّقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تحدّد إذا المستوي (ABC) .

- ب) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

يمكن إتّباع إحدي الطّريقتين :

**** طريقة 1 :**

*) نبدأ أوّلا بتعيين شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

نفرض أنّ $\vec{n}(a;b;c)$ هو أحد هذه الأشعّة النّاظمية

$\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AC}$.

وبالتّالي :

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}2a-c=0\\ b+c=0\end{cases}$.

من اجل $a=1$ (مثلا) نجد : $c=2$ و $b=-2$.

في هذه الحالة : $\vec{n}(1;-2;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

ثمّ :

*المستوي (ABC) معرّف تماما بالنقطة $A(1;2;2)$ والشعاع النّاظمي $\vec{n}(1;-2;2)$.

المستوي (ABC) هو مجموعة النّقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ ... (1) .

باستعمال العبارة التّحليلية للجداء السّلمي :

(1) تكافئ $(x-1)(1)+(y-2)(-2)+(z-2)(2)=0$

إذا : $(ABC): x-2y+2z-1=0$.

طريقة 2 :

* نعيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) .

المستوي (ABC) معرّف بالأساس $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ والنقطة A .

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC) :

يوجد عددان حقيقيان t و k :

$\overrightarrow{AM}=t\times\overrightarrow{AB}+k\times\overrightarrow{AC}$ ... (2) .

العلاقة (2) مكافئة لجملة التّمثيل الوسيطي :

$$(ABC):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+k \quad ; t\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{R}\\ z=2-t+k\end{cases}$$.

* ثمّ ننتقل من جملة الّمثيل الوسيطي إلى المعادلة الدّيكارتية :

من الجملة السّابقة نلاحظ ما يلي :

$y-z=t$.

بما أنّ $x=1+2t$ فإنّه وبتعويض t بقيمته نجد :

$x=1+2(y-z)$ أي $x=1+2y-2z$.

وعليه : $(ABC): x-2y+2z-1=0$.

2) - أ) نبيّن أن (P_1) و (P_2) متقاطعان .

لدينا :

$\vec{n}_1(1;-2;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1) .

$\vec{n}_2(1;-3;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

واضح أنّ $\frac{x_{\vec{n}_1}}{x_{\vec{n}_2}} \neq \frac{y_{\vec{n}_1}}{y_{\vec{n}_2}}$ أي :

$\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ ليسا مرتبطين خطّيا وعليه :

(P_1) و (P_2) متقاطعان .

- ب) نبيّن أنّ النّقطة C تنتمي إلي (Δ) .

يكفي أن نبّين أنّ A نقطة مشتركة بين المستويين (P_1) و (P_2) .

لدينا :

$$\begin{cases}x_C-2y_C+2z_C+1=1-2(3)+2(2)-1=0\\ x_C-3y_C+2z_C+2=1-3(3)+2(3)+2=0\end{cases}$$.

أي $\begin{cases}C\in(P_1)\\ C\in(P_2)\end{cases}$ أي $C\in(P_1)\cap(P_2)$ أي $C\in(\Delta)$.

- جـ) نتحقق أنّ الشّعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

لهذا نبيّن أنّ $\vec{u}$ عمودي على $\vec{n}_1$ و $\vec{u}$ عمودي على $\vec{n}_2$.

لدينا ما يلي :

$$\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}_1=2(1)+0(-2)+(-1)(2)=0\\ \vec{u}.\vec{n}_2=2(1)+0(-3)+(-1)(2)=0\end{cases}$$ وهذا معناه:

$\vec{u}$ عمودي على $\vec{n}_1$ و $\vec{u}$ عمودي على $\vec{n}_2$.

وبالتّالي : $\vec{u}(2;0;-1)$ شعاع توجيه لـ (Δ) .

- د) إستنتاج تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) معرّف تماما بالنّقطة $C(1;3;3)$ وشعاع التّوجيه $\vec{u}(2;0;-1)$.

إذا : $$(\Delta):\begin{cases}x=1+2k\\ y=3; k\in\mathbb{R}\\ z=3-k\end{cases}$$

3) - أ) نعيّن قيمة الوسيط k التّي من أجلها يكون الشّعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين .

لدينا ما يلي :

M نقطة من (Δ) معناه $M(1+2k;3;3-k)$.

في هذه الحالة : $\overrightarrow{AM}(2k;1;-k+1)$.

$\overrightarrow{AM}$ عمودي على $\vec{u}$ معناه

$2k(2)+1(0)+(-k-1)(+1)=0$ أي $k=\frac{1}{3}$.

- ب) إستنتاج المسافة بين النّقطة A و (Δ) .

حسب ما سبق : من اجل $k=\frac{1}{3}$ يكون الشّعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين أي من أجل $k=\frac{1}{3}$ تكون النقطة M هي المسقط العمودي للنّقطة A على المستقيم (Δ) والمسافة هي AM .

من أجل $K=\frac{1}{3}$ نجد : $M\left(\frac{5}{3};3;\frac{8}{3}\right)$ و $\overrightarrow{AM}\left(\frac{2}{3};1;\frac{2}{3}\right)$.

في هذه الحالة : $AM=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+(1)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

<u>التّمرين الثّاني :</u>

1) حساب $f\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

$$f\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+2\left(-1+i\sqrt{3}\right)+9$$
$$=1-3-2i\sqrt{3}-2+2i\sqrt{3}+9$$

أي : $f\left(-1+i\sqrt{3}\right)=5$.

2) – أ) نحلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=5$.

$f(z)=5$ يكافئ $z^2+2z+4=0$

يمكن حساب المميّز Δ لهذه المعادلة لكن : المعادلة من الدّرجة الثّانية وبمعاملات حقيقية .

حسب ما سبق :

المعادلة تقبل حلاّ ليس حقيقيا وهو $z_1=-1+i\sqrt{3}$.

في هذه الحالة الحلّ الثّاني هو z_2 حيث :

$z_2=\overline{z_1}=-1-i\sqrt{3}$.

- ب) كتابة حلّي المعادلة على الشّكل الأسّي.

*) لدينا : $\left|-1+i\sqrt{3}\right|=2$ وبالتّالي :

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

إذا : $\left(-1+i\sqrt{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $\left(-1-i\sqrt{3}\right)=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

3) تعيين مجموعة قيم λ التّي من أجلها يكون للمعادلة $f(z)=\lambda$ حلاّن حقيقيان .

$f(z)=\lambda$ يكافئ $z^2+2z+9-\lambda=0$.

* $\Delta=2^2-4(9-\lambda)$ أي $\Delta=4\lambda-32$.

حتّى يكون للمعادلة حلاّن مترافقان يجب ويكفي أن يكون $\Delta\prec 0$.

$\Delta\prec 0$ معناه $4\lambda-32\prec 0$

معناه $\lambda\prec 8$ أي $\lambda\in\left]-\infty;8\right[$.

4) نعيّن الطبيعة الهندسيّة والعناصر المميّزة لـلمجموعة (F) .

لدينا ما يلي :

$|f(z)-8|=3$ يكافئ $\left|z^2+2z+9-8\right|=3$

يكافئ $\left|z^2+2z+1\right|=3$

يكافئ $\left|(z+1)^2\right|=3$ أي :

$|z+1|^2=3$ يكافئ $|z+1|=\sqrt{3}$

يكافئ $|z-(-1)|=\sqrt{3}$ ... (1)

بوضع $\omega(-1;0)$: (1) تكافئ $|z-z_\omega|=\sqrt{3}$

تكافئ $\omega M=3$.

المجموعة (F) هي إذا الدّائرة ذات المركز $\omega(-1;0)$ ونصف القطر $\sqrt{3}$.

5) – أ) نكتب $f(z)$ على الشّكل الجبري .

من أجل $z=x+iy$ نجد :

$$f(z)=(x+iy)^2+2(x+iy)+9$$
$$=x^2-y^2+2ixy+2x+2iy+9$$
$$=\left(x^2-y^2+2x+9\right)+i\left(2xy+2y\right)$$

- ب) نبرهن أنّ المجموعة (E) هي إتّحاد مستقيمين (D_1) و (D_2) يطلب إعطاء معادلة لكلّ منهما .

$f(z)\in\mathbb{R}$ معناه $\mathrm{Im}\left[f(z)\right]=0$

معناه $2y(y+1)=0$

معناه $\left[\begin{array}{l}2y=0\\ x+1=0\end{array}\right.$ أي $\left[\begin{array}{l}y=0\\ x=-1\end{array}\right.$

وبالتّالي : المجموعة (E) هي إتحاد المستقيمين :

$(D_1):y=0$ (حامل محور الفواصل)و $(D_2):x=-1$.

- جـ) نعيّن إحداثيات نقط تقاطع (E) و (F) .

لدينا ما يلي :

المجموعة (F) هي مجموعة النقط M ذات اللاّحقة $z=x+iy$ حيث : $|z+1|=\sqrt{3}$

*) ترتيب النّقطة المشتركة M بين (D_1) و (F) هي 0 .

أي في هذه الحالة $z=x$ ومنه :

$|x+1|=\sqrt{3}$ معناه $\left[\begin{array}{l}x+1=\sqrt{3}\\ x+1=-\sqrt{3}\end{array}\right.$ أي $\left[\begin{array}{l}x=-1+\sqrt{3}\\ x=-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

وعليه : (E) و (F) تشتركان في النّقطتين ذات الإحداثيتين $\left(-1+\sqrt{3};0\right)$ و $\left(-1-\sqrt{3};0\right)$.

*) فاصلة النّقطة M المشتركة بين (D_2) و (F) هي (-1) ومنه : $z=-1+iy$.

في هذه الحالة :

$\left|-1+iy+1\right|=\sqrt{3}$ معناه $\sqrt{y^2}=\sqrt{3}$

معناه $y^2=3$

معناه $y=\sqrt{3}$ أو $y=-\sqrt{3}$.

وعليه : المجموعتان (E) و (F) تشتركان في النّقطتين ذات الإحداثيتين $\left(-1;\sqrt{3}\right)$ و $\left(-1;-\sqrt{3}\right)$.

التّمرين الثّالث :

<u>جزء1</u>

1) نحلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=x$.

$f(x)=x$ يكافئ $x-\ln\left(x^2+1\right)=x$

يكافئ $\ln\left(x^2+1\right)=0$

يكافئ $x^2+1=1$ أي $x=0$

2) ندرس تغيّرات الدّالة f ثمّ نشكّل جدولا للتّغيّرات.

*) حساب النّهايتين :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \begin{cases} x\to-\infty \\ -\ln\left(x^2+1\right)\to-\infty;\left(x^2+1\right)\to-\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=? \quad \begin{cases} x\to+\infty \\ -\ln\left(x^2+1\right)\to-\infty;\left(x^2+1\right)\to+\infty \end{cases}$$

لدينا حالة عدم التّعيين من الشّكل $(+\infty-\infty)$.

نزيل هذه الحالة.

في جوار $+\infty$ (أي $x\succ0$) :

$$f(x)=x-\ln\left(x^2\times(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x-\ln\left(x^2\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x-2\ln x-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

أي : $f(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

بالانتقال إلى النّهاية نجد :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \;;\; \begin{cases} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\to+\infty;\frac{\ln x}{x}\to0 \\ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\to0;\frac{1}{x^2}\to0 \end{cases}$$

*) الدّالة المشتقّة وإشارتها .

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$:

$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}$ أي $f'(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

. $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

إشارة $f'(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

*) تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f .

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3) نستنتج أنّه إذا كان $x\in[0;1]$ فإنّ $f(x)\in[0;1]$

الدّالة f مستمرّة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فهي إذا تحفظ الترتيب .

لدينا : $f(0)=0$ و $f(1)=1-\ln2$.

إذا كان $0\le x\le1$ ينتج $f(0)\le f(x)\le f(1)$

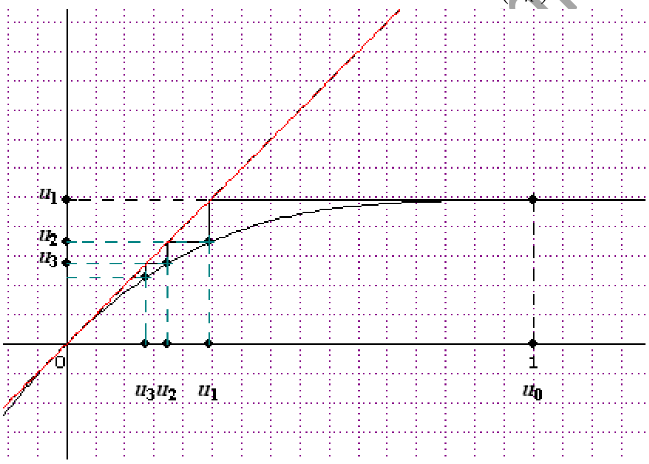
أي : إذا كان $0\le x\le1$ فإنّ $0\le f(x)\le1-\ln2$.

وبما أنّ $(1-\ln2)\le1$ ينتج ما يلي :

إذا كان $x\in[0;1]$ فإنّ $f(x)\in[0;1]$.

<u>جزء2 :</u>

1) نعلّم على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة من المتتالية (u_n)



2) باستعمال مبدأ الإستدلال بالتّراجع ، نثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0\le u_n\le1$.

نضع : $P(n):0\le u_n\le1$

*) تحقّق من صحّة $P(0)$

$u_0=1$ فرضا ، إذا u_0 يحقق : $0\le u_0\le1$

ومنه : $P(0)$ صحيحة .

*) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أنّه لدينا $0\le u_n\le1$

ونبيّن صحّة $P(n+1)$ أي نبيّن أن : $0\le u_{n+1}\le 1$.

لدينا وحسب فرضيّة التّراجع : $0\le u_n\le 1$ ثمّ :

وحسب ما سبق وجدنا :

إذا كان $0\le x\le 1$ فإنّ $0\le f(x)\le 1$.

في هذه الحالة ومن أجل $x=u_n$ ينتج : $0\le f(u_n)\le 1$

وبما أنّ $u_{n+1}=f(u_n)$ يكون : $0\le u_{n+1}\le 1$.

إذا $P(n+1)$ صحيحة .

***) ممّا سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتّراجع ،

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$.

3) – أ) دراسة إتّجاه تغيّر المتتالية (u_n).

لهذا ندرس في $\mathbb{N}$ ، إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$.

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=u_n-\ln\left(u_n^2+1\right)-u_n$$
$$=-\ln\left(u_n^2+1\right)$$

لدينا وحسب ما سبق : $0\le u_n\le 1$ أي $1\le u_n^2+1\le 2$.

الدّالة $\ln$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فهي تحفظ التّرتيب . وعليه : $\ln(1)\le\ln\left(u_n^2+1\right)\le\ln 2$

أي : $0\le\ln\left(u_n^2+1\right)\le\ln 2$ وبالتّالي :

$0\ge-\ln\left(u_n^2+1\right)\ge-\ln 2$.

إذا : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $(u_{n+1}-u_n)\le 0$

المتتالية (u_n) متتالية متناقصة .

- ب) نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متتالية متقاربة

لدينا ما يلي :

(u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 و (u_n) متناقصة .

إذا : (u_n) متقاربة .

- نعين نهاية المتتالية (u_n) .

نفرض أن (u_n) تتقارب نحو العدد الحقيقي l أي

نفرض أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=l$.

العدد الحقيقي l يحقّق : $\begin{cases} l=l-\ln\left(l^2+1\right)...(1)\\ 0\le l\le 1\end{cases}$.

(1) تكافئ $l=0$.

<u>ملاحظة :</u>

بيانيا نهاية المتتالية (u_n) هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المنصّف الأول .

<u>التّمرين الرّابع :</u>

1) – أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\ ;\ \begin{cases}(x+2)\to-\infty\\ \dfrac{4e^x}{e^x+3}\to 0;e^x\to 0\end{cases}$$

- ب) إستنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يطلب إعطاء معادلة له .

لدينا :

إذا : في جوار $(-\infty)$: $\begin{cases} f(x)=(x+2)-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)=0\end{cases}$

المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $(-\infty)$.

- جـ) دراسة الوضع النّسبي لـ (C_f) و (D) .

لهذا ندرس في $\mathbb{R}$ إشارة الفرق $f(x)-(x+2)$.

لدينا : $f(x)-(x+2)=-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\prec 0$.

إذا (C_f) أسفل (D) .

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=?\ ;\ \begin{cases}(x+2)\to+\infty\\ \dfrac{4e^x}{e^x+3}\to ?;\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)\end{cases}$$

نزيل إذا حالة عدم التّعيين . $\dfrac{4e^x}{e^x+3}=\dfrac{4e^x}{e^x\left(1+3e^{-x}\right)}$

$$=\frac{4}{1+3e^{-x}}$$

إذا : $\begin{cases}(x+2)\to+\infty\\ \dfrac{4}{1+3e^{-x}}\to 4;e^{-x}\to 0\end{cases}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3) – أ) نبيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=1-\frac{4e^x\left(e^x+3\right)-e^x\left(4e^x\right)}{\left(e^x+3\right)^2}$$
$$=\frac{\left(e^x+3\right)^2-4e^{2x}-12e^x+4e^x}{\left(e^x+3\right)^2}$$
$$=\frac{e^{2x}+6e^x+9-12e^x}{\left(e^x+3\right)^2}$$
$$=\frac{e^{2x}-6e^x+9}{\left(e^x+3\right)^2}$$
$$=\frac{\left(e^x-3\right)^2}{\left(e^x+3\right)^2}$$

إذا ومن اجل كلّ x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

- ب) ندرس إتّجاه تغيّر f ثمّ نشكّل جدول تغيّراتها .

*نلاحظ أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x)\geq 0$.

$f'(x)=0$ يكافئ $e^x-3=0$

يكافئ $x=\ln 3$.

يمكن تمثيل إشارة $f'(x)$ كما يلي :

$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
	$+$	0	$+$	

* جدول تغيّرات الدّالة f يكون كما يلي:

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

4) – أ) المماس (Δ_1) لـ (C_f) عند النّقطة ذات الفاصلة $\ln 3$.

معامل توجيه المماس (Δ_1) هو $f'(\ln 3)$.

بما أنّ $f'(\ln 3)=0$ فإنّ (Δ_1) يوازي حامل محور الفواصل.

ب -) نستعين باتّجاه تغيّر الدالة f لتحديد الوضع النّسبي لـ (C_f) و (Δ_1) .

من خلال جدول التغيرات نلاحظ أنّ f' تنعدم عند القيمة $\ln 3$ دون أن تغيّر إشارتها . بيانيا هذا معناه :

النّقطة ذات الفاصلة $\ln 3$ نقطة انعطاف أي المماس في هذه النّقطة يخترق (C_f) .

وبما أنّ f متزايدة تماما على مجموعة تعريفها فإن وضع (C_f) بالنّسبة إلي (Δ_1) يكون كما يلي :

*) (C_f) أسفل (Δ_1) في المجال $]-\infty;\ln 3[$.

*) (C_f) يشترك مع (Δ_1) في النّقطة ذات الفاصلة $\ln 3$.

*) (C_f) أعلي (Δ_1) في المجال $]\ln 3;+\infty[$.

5) – أ) نبيّن أنّ معادلة المماس (Δ_2) في النّقطة $C(0;1)$ هي : $y=\frac{1}{4}x+1$.

معادلة المماس (Δ_2) معطاة بالعلاقة :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

$f'(0)=\frac{1}{4}$ ، $f(0)=1$. بالتّعويض نجد :

$(\Delta_2);y=\frac{1}{4}x+1$.

- ب) نحدّد الوضع النّسبي لـ (C_f) و (Δ_2) .

لهذا ندرس في المجال $]-\infty;\ln 3[\mathbb{R}$ إشارة الفرق :

$\left[f(x)-\left(\frac{1}{4}x+1\right)\right]$.

نعرّف علي المجال $]-\infty;\ln 3[$ الدّالة g بـ :

$g(x)=f(x)-\left(\frac{1}{4}x+1\right)$.

لتحديد إشارة الفرق أي إشارة $g(x)$ نقسّم العمل إلي مرحلتين :

*) الدّالة g قابلة للإشتقاق علي المجال $]-\infty;\ln 3[$.

$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{4}$.

الدّالة g' قابلة للإشتقاق علي المجال $]-\infty;\ln 3[$:

$$g''(x)=f''(x)$$

$$=\frac{12e^x\left(e^x-3\right)}{\left(e^x+3\right)^2}$$

إشارة $g''(x)$ من إشارة $\left(e^x-3\right)$.

حسب ما سبق :

من أجل كلّ x من المجال $]-\infty;\ln 3[$: $g''(x)\leq 0$.

جدول تغيّرات الدّالة g يكون كما يلي :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$
$g''(x)$		$-$		$-$	
$g'(x)$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$

إشارة $g'(x)$ علي المجال $]-\infty;\ln 3[$ كما يلي :

$-\infty$		0		$\ln 3$
	$+$	0	$-$	

*)جدول تغيّرات الدّالة g يكون كما يلي :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{3}{4}\ln 3-1$

من خلال هذا الجدول نلاحظ أنّ القيمة 0 قيمة حدّية صغري للدّالة g علي المجال $]-\infty;\ln 3[$.

وهذا معناه : من اجل كلّ x من $]-\infty;\ln 3[$ ، $g(x)\leq 0$.

إذا : من أجل كلّ x من المجال $]-\infty;\ln 3[$:

$\left[f(x)-(\frac{1}{4}x+1)\right]\leq 0$. وهذا معناه :

(C_f) يقع أسفل (Δ_2) علي المجال $]-\infty;\ln 3[$.

6) نبرهن أنّ النّقطة $I(\ln 3;\ln 3)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

بما أنّ الدّالة f معرّفة علي $\mathbb{R}$ يكفي أن نبيّن ما يلي :

$f(2\ln 3-x)+f(x)=2\ln 3$

لدينا :

$$f\left(2\ln 3-x\right)=f\left(\ln 9-x\right)$$
$$=\ln 9-x+2-\frac{4e^{\ln 9-x}}{e^{\ln 9-x}+3}$$

لكنّ :
$$\frac{4e^{\ln x-9}}{e^{\ln x-9}+3}=\frac{4\frac{e^{\ln 9}}{e^{x}}}{\frac{e^{\ln 9}+3e^{x}}{e^{x}}}$$
$$=\frac{36}{9+3e^{x}}$$
$$=\frac{12}{e^{x}+3}$$

ومنه :

$$f\left(2\ln 3-x\right)+f\left(x\right)=-x+2+\ln 9-\frac{12}{e^{x}+3}+x+2-\frac{4e^{x}}{e^{x}+3}$$
$$=4+\ln 9-\frac{4\left(e^{x}+3\right)}{e^{x}+3}$$
$$=4+\ln 9-4$$
$$=2\ln 3$$

وهو المطلوب .

إذا النّقطة I هي مركز تناظر للمنحني $\left(C_f\right)$.

إنشاء $\left(D\right)$ ، $\left(\Delta_1\right)$ ، $\left(\Delta_2\right)$ و $\left(C_f\right)$.