حلّ الموضوع رقم 5.

التمرين الأوّل :

1) – أ) بالتّراجع ، نبيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \le 2$.

نضع : $P(n):\ 0 \prec u_n \le 2$.

* نتحقّق من صحّة $P(0)$.

لدينا فرضا $u_0 = 2$ إذا $0 \prec u_0 \le 2$.

أي $P(0)$ صحيحة .

* نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة أي نفرض أنّ $0 \prec u_n \le 2$

ونبيّن أنّ $P(n+1)$ صحيحة أي نبيّن ما يلي : $0 \prec u_{n+1} \le 2$

حسب فرضيّة التّراجع لدينا : $0 \prec u_n \le 2$ ومنه $0 \prec 2u_n \le 4$

بما أنّ الدّالة الجذر التّربيعي متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ نستنتج أنّ $\sqrt{0} \prec \sqrt{2u_n} \le \sqrt{4}$

أي $0 \prec u_{n+1} \le 2$.

إذا $P(n+1)$ صحيحة .

ممّا سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتّراجع ينتج :

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 \prec u_n \le 2$

- ب) ندرس إتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

لهذا ندرس في $\mathbb{N}$ إشارة الفرق $(u_{n+1} - u_n)$

من اجل كلّ عدد طبيعي n ، لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2u_n} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n} + u_n\right)}{\left(\sqrt{2u_n} + u_n\right)}$$

$$= \frac{2u_n - u_n^2}{\left(\sqrt{2u_n} + u_n\right)}$$

إشارة الفرق هي إذا من إشارة $(2u_n - u_n^2)$.

لدينا : $(2u_n - u_n^2) = u_n(2 - u_n)$.

حسب ما سبق : $\begin{cases} u_n \succ 0 \\ 2 - u_n \ge 0 \end{cases}$ ومنه : $(2u_n - u_n^2) \ge 0$

المتتالية (u_n) هي إذا متزايدة في $\mathbb{N}$.

- جـ) إستنتاج أن (u_n) متقاربة .

(u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 .
و
(u_n) متزايدة .

إذا (u_n) متقاربة .

2) – أ) نبرهن أنّ (v_n) متتالية هندسية متقاربة نحو 0 .

لدينا ومن أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2u_n}}{2}\right)$$

$$= \ln\sqrt{\frac{2u_n}{4}}$$

أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln u_n - \ln 2\right)$$

إذا : من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

وبالتّالي المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

وبما أنّ $-1 \prec q \prec 1$ فإنّ المتتالية الهندسية (v_n) متقاربة وتتقارب نحو 0 أي : $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = 0$.

- ب) *) التعبير عن v_n بدلالة n .

عبارة الحدّ العامّ للمتتالية الهندسية (v_n) معطاة بالعلاقة :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

لدينا : $\begin{cases} v_0 = \ln u_0 - \ln 2 = -\ln 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ بالتّعويض نجد :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \ln 2$

***) إستنتاج عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n)**

لدينا : $v_n = \ln u_n - \ln 2$ معناه $\ln u_n = v_n + \ln 2$

معناه $u_n = e^{v_n + \ln 2}$

معناه $u_n = e^{v_n} \times e^{\ln 2}$

أي :من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = 2 \times e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n . \ln 2}$.

- جـ) إيجاد نهاية المتتالية (u_n) .

$$\lim_{x \to +\infty} u_n = 2 \ ; \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0; e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2} \to 1\right)$$

التّمرين الثّاني :

1) تعيين العددين الحقيقيين a و b

لدينا : من أجل كلّ عدد مركّب z ،

$$(z+2)\left(z^2 + az + b\right) = z^3 + az^2 + bz + 2z^2 + 2az + 2b$$

$$= z^3 + (a+2)z^2 + (b+2a)z + 2b \ .$$

بالمطابقة نحصل على الجملة :

$\begin{cases} a + 2 = 0 \\ b + 2a = 0 \\ 2b = 8 \end{cases}$ وهذا مكافئ لـ : $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$.

إذا من أجل كلّ عدد مركّب z :

$$P(z) = (z+2)\left(z^2 - 2z + 4\right)$$

2) – أ) نحلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

(E) تكافئ $(z+2)(z^2-2z+4)=0$

(E) تكافئ $\left[\begin{array}{l} z+2=0\ ;\ z=-2 \\ z^2-2z+4=0\ \ldots (*) \end{array}\right.$

نحلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$

- حساب المميّز Δ

$$\Delta = 4-16 = -12$$

العدد $(2i\sqrt{3})$ جذر تربيعي للمميّز Δ .

- للمعادلة (*) حلاّن مترافقان z_1 و z_2 حيث :

$z_1=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}$ أي $z_1=1+i\sqrt{3}$

$z_2=\overline{z_1}=1-i\sqrt{3}$.

إذا كانت S هي مجموعة حلول المعادلة (E) فإنّ :

$S=\{-2;1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\}$.

- ب) نستنتج في $\mathbb{C}$ مجموعة حلول المعادلة $(iz-1)^3+8=0$.

بوضع $\alpha=iz-1$:

المعادلة $(iz-1)^3+8$ مكافئة لـ $\alpha^3+8=0$.

حسب ما سبق توجد ثلاثة حلول α_1 ، α_2 و α_3 .

إذا $\left\{\begin{array}{l} \alpha_1=-2 \\ \alpha_2=1+i\sqrt{3} \\ \alpha_3=1-i\sqrt{3} \end{array}\right.$ أي : $\left[\begin{array}{l} iz-1=-2 \\ iz-1=1+i\sqrt{3} \\ iz-1=1-i\sqrt{3} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} z=-\dfrac{1}{i} \\ z=\dfrac{(2+i\sqrt{3})}{i} \quad \text{و} \\ z=\dfrac{(2-i\sqrt{3})}{i} \quad \text{و} \end{array}\right.$ وبالتالي $\left[\begin{array}{l} z=i \\ z=\sqrt{3}-2i \quad ,\text{و} \\ z=-\sqrt{3}-2i \quad ,\text{و} \end{array}\right.$

- جـ) * حساب $\left(\dfrac{z_0}{2}\right)^3$.

لدينا : $z_0=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

حسب دستور موافر : $\left(\dfrac{z_0}{2}\right)^3=(\cos\pi+i\sin\pi)$

أي : $\left(\dfrac{z_0}{2}\right)^3=-1$

*) **إستنتاج** $\left(\dfrac{z_0}{2}\right)^7$.

$$\left(\frac{z_0}{2}\right)^7=\frac{z_0}{2}\left[\left(\frac{z_0}{2}\right)^3\right]^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(-1)^2$$

وعليه : $\left(\dfrac{z_0}{2}\right)^z=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

II) 1) – أ) نبرهن أنّ $R(A)=B$ ، $R(B)=C$ **و** $R(C)=A$.

يمكن – مثلا- أن نعيّن الكتابة المركّبة للدّوران R .

*/ بما أنّ مركز R هو مبدأ الإحداثيات فإن R معرّف بعلاقة من الشّكل : $z'=az$ حيث :

$$a=\left[1;\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) .$$

$$R: M(z)\mapsto M'(z')$$

إذا : $z'=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

في هذه الحالة :

*) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2)$

$=1-i\sqrt{3}$

$=z_B$ وعليه $R(A)=B$

**) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i\sqrt{3})$

$=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}$

$=1+i\sqrt{3}$

$=z_C$ إذا : $R(B)=C$

***) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i\sqrt{3})$

$=-2$

$=z_A$ أي $R(C)=A$

- ب) إستنتاج أنّ المثلّث ABC متقايس الأضلاع.

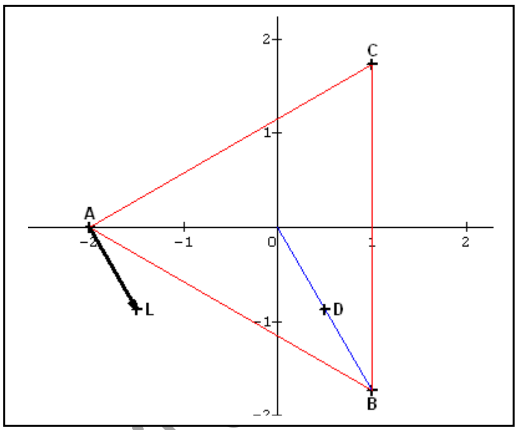
الدّوران تقايس في المستوي . وهذا معناه :

إذا كان $\begin{cases} R(A)=B \\ R(B)=C \\ R(C)=A \end{cases}$ فإن $\begin{cases} AB=BC \\ BC=CA \end{cases}$

ومنه : $AB=BC=CA$.

المثلّث ABC هو إذا مثلّث متقايس الأضلاع .

- جـ) تعليم النّقط A ، B ، C و D .



2) – أ) *) نعيّن z_L لاحقة النّقطة L

$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{OD}$ يكافئ $z_L-z_A=z_D$

يكافئ $z_L=z_A+z_D$.

بالتّعويض نجد : $z_L=-2+\frac{z_B}{2}$ ، D منتصف $[OB]$

$$=-2+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذا : $z_L=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

*) نعيّن عمدة للعدد المركّب $\frac{z_L}{z_D}$

$$\frac{z_L}{z_D}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4}$$

$$=\frac{-3-3i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{4}$$

$$=-i\sqrt{3}$$

إذا : $\arg\left(\frac{z_L}{z_D}\right)=ar(-i\sqrt{3})+2\pi k;k\in\mathbb{Z}$

$$=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;k\in\mathbb{Z}$$

- ب) إستنتاج أنّ $(OL)\perp(OD)$ و $(OL)\perp(AL)$.

حسب ما سبق :

//) $\arg\left(\frac{z_L}{z_D}\right)=-\frac{\pi}{2}$ معناه $\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OL}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

إذا $(OD)\perp(OL)$ . .... (1)

//) ثمّ $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{OD}$ ومنه (AL) يوازي (OD) ... (2)

من (1) و (2) ينتج : $(OD)\perp(AL)$.

التّمرين الثّالث :

1) نبين أن المثلث ABC مثلث قائم .

** يمكن :

أ) حساب أطوال أضلاع المثلث ABC .

لدينا : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$$=\sqrt{9+9+9}$$

$$=3\sqrt{3}$$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}$$

$$=\sqrt{9+0+9}$$

$$=3\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}$$

$$=\sqrt{0+9+36}$$

$$=3\sqrt{5}$$

ب) نلاحظ مايلي :

$\begin{cases} AB^2+AC^2=45 \\ BC^2=45 \end{cases}$ أي $BC^2=AC^2+AB^2$

حسب المبرهنة العكسية لفيثاغورس :

المثلث ABC قائم في A .

** كما يمكن :

ا) إيجاد مركبات الأشعة : $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

لدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$.

ب) نلاحظ ما يلي :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(3)(3)+(3)(0)+(3)(-3)$$

$$=0$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ معناه $\overrightarrow{AB}$ عمودي على $\overrightarrow{AC}$.

وبالتالي : المثلث ABC قائم في A .

2)- أ) نتحقق أن النقط B ، C و D ليست في استقامية

لهذا نبين $\vec{n}$ (مثلا) أن $\overrightarrow{BD}$ ليس مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{BC}$.

لدينا :

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$.

بما أن $\frac{y_{\overrightarrow{BC}}}{y_{\overrightarrow{BD}}}\neq\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{BD}}}$ فهذا يعني :

لا يوجد عدد حقيقي k حيث : $\overrightarrow{BC}=k.\overrightarrow{BD}$ أي :

$\overrightarrow{BD}$ ليس مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{BC}$ وبالتالي :

النقط B ، C و D تعرف المستوي (BCD) .

ب) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (BCD).

* نعين شعاعا ناظميا للمستوي (BCD).

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (BCD).

في هذه الحالة :

$$\begin{cases}\vec{n} \text{ عمودي على } \overrightarrow{BD}\\ \vec{n} \text{ عمودي على } \overrightarrow{BC}\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$$

باستعمال العبارة التحليلية للجداء السلمي نجد :

$$\begin{cases}-6a+3b-6c=0\\ -3b-6c=0\end{cases} \text{ معناه } \begin{cases}-2a+b-2c=0...(1)\\ b+2c=0...(2)\end{cases}.$$

من (2) ومن أجل $c=1$ نجد $b=-2$.

بتعويض كلا من b و c بقيمته في (1) نجد :

$-2a-4=0$ أي $a=-2$.

الشعاع $\vec{n}(-2;-2;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (BCD).

* في هذه الحالة :

المستوي (BCD) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق العلاقة $\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0$ ... (I) .

(I) تكافئ

$$(x-6)(-2)+(y-1)(-2)+(z-5)(1)=0$$

تكافئ $-2x+12-2y+2+z-5=0$

تكافئ : $-2x-2y+z+9=0$.

$(BCD):-2x-2y+z+9=0$.

3)- أ) نبرهن أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

لهذا نبين ما يلي :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD} \text{ عمودي على } \overrightarrow{AB}\\ \text{و}\\ \overrightarrow{AD} \text{ عمودي على } \overrightarrow{AC}\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0\\ \text{و}\\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$

لدينا : $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=(-3)(3)+(6)(3)+(-3)(3)\\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=(-3)(3)+(6)(0)+(-3)(-3)\end{cases}$$

أي :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$ أي $\overrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي (ABC)

- ب) إستنتاج حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$.

بما أن $\overrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي (ABC) فإن المثلث ABC يمثل قاعدة رباعي الوجوه $(ABCD)$ و AD طول إرتفاعه .

إذا كان v هو هذا الحجم فإن قيمة v معطاة بالعلاقة :

$v=\frac{1}{3}s\times AD$ حيث s تمثل مساحة القاعدة .

لدينا :

من جهة : $s=\frac{1}{2}AB\times AC$

$$=\frac{1}{2}3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times 9\sqrt{6}$$

من جهة أخرى : $AD=\sqrt{9+36+9}$

$$=2\sqrt{54}$$

$$=2\times 3\sqrt{6}$$

$$=6\sqrt{6}$$

وعليه :

$$v=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}9\sqrt{6}\right)\times 6\sqrt{6}$$

$$=27u.v$$

4) نبين أن $\widehat{BDC}=45^0$.

حسب تعريف الجداء السلمي :

لدينا من جهة :

بما أن

$\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ ، $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ ينتج :

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=(6)(6)+(-3)(-6)+(6)(0)$$

$$=54$$

من جهة أخرى :

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=DB\times DC\times\cos\widehat{BDC}$$

$$=\left(\sqrt{36+9+36}\right)\left(\sqrt{36+36}\right)\cos\widehat{BDC}$$

$$=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times\cos\widehat{BDC}$$

$$=9\times 6\times\sqrt{2}\cos\widehat{BDC}$$

$$=54\sqrt{2}\times\cos\widehat{BDC}$$

بالمقارنة نجد : $54\sqrt{2}\times\cos\widehat{BDC}=54$

وهذا معناه : $\cos\widehat{BDC}=\dfrac{54}{54\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

إذا : $\widehat{BDC}=45^{0}$.

5) حساب المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC) .

لتكن d هذه المسافة .

بما أن معادلة المستوي (BDC) هي :

$-2x-2y+z+9=0$

فإن : $d=\dfrac{|-2x_A-2y_A+z_A+9|}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(1)^2}}$

$=\dfrac{|-6+4+2+9|}{\sqrt{9}}$

$=3$.

6) – أ) نبرهن أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

الشعاع $\vec{n}_1(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1) .

الشعاع $\vec{n}_2(1;0;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

نلاحظ أن $\dfrac{x_{\vec{n}_1}}{x_{\vec{n}_2}}\neq\dfrac{z_{\vec{n}_1}}{z_{\vec{n}_2}}$ ومنه : $\vec{n}_1$ ليس مرتبط خطيا مع $\vec{n}_2$

ومنه : (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

- ب) نعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

الجملة :

$\begin{cases} x+y+z-3=0\ldots(1) \\ x-z-1=0\ldots(2)\end{cases}$ هي جملة المعادلتين الديكارتيتين لـ (Δ)

من (2) وبوضع $x=t$ حيث $t\in\mathbb{R}$ نجد : $z=-1+t$.

بتعويض كل من x و z في (1) نجد :

$t+y-1+t-3=0$ أي $y=4-2t$ وعليه :

$$(\Delta):\begin{cases} x=t \\ y=4-2t\,;t\in\mathbb{R} \\ z=-1+t\end{cases}$$

<u>التمرين الرّابع :</u>

<u>جزء1</u>

1) دراسة نهايتي g عند $(-\infty)$ وعند $(+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty\ ;\ \begin{cases}(x^2-2x+2)\to+\infty \\ e^{-x}\to+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=?\ ;\ \begin{cases}(x^2-2x+2)\to+\infty \\ e^{-x}\to 0\end{cases}$

لدينا حالة عدم التّعيين من الشّكل $(0\times\infty)$.

نزيل هذه الحالة .

نلاحظ أنّه يمكننا كتابة $g(x)$ على الشّكل :

$g(x)=1-\dfrac{x^2}{e^x}+2\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{2}{e^x}$.

بالإنتقال إلي النّهاية نجد :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1\ ;\ \left(\dfrac{x^2}{e^x}\to 0;\dfrac{e^x}{x}\to 0;\dfrac{2}{e^x}\to 0\right)$

2) دراسة إتّجاه تغيّر الدالة g وتشكيل جدولا للتغيّرات

*) الدّالة g قابلة للإشتقاق علي $\mathbb{R}$ ولدينا :

$g'(x)=-\left[(2x-2)e^{-x}-e^{-x}(x^2-2x+2)\right]$

$=e^{-x}(x^2-2x+2-2x+2)$

من اجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=e^{-x}(x-2)^2$.

*) إشارة $g'(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	

*) جدول تغيّرات الدّالة g يكون كما يلي :

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	0		1

3) – أ) *) نبرهن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α .

من خلال جدول التّغيّرات ، نلاحظ أنّ الدّالة g مستمرّة ومتزايدة تماما علي $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1[$

$0\in]-\infty;1[$.حسب مبرهنة القيم المتوسّطة :

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في $\mathbb{R}$.

***) نبرهن أنّ $0,35\leq\alpha\leq 0,36$.**

لدينا : $g(0,35)\approx-00024$ ، $g(0,36)\approx 0,0166$.

بما أنّ $g(0,35)\times g(0,36)\prec 0$ فإنّ $0,35\leq\alpha\leq 0,36$.

- ب) إستناج إشارة $g(x)$ وذلك حسب قيم x .

من خلال جدول التّغيرات وبما أنّ $g(\alpha)=0$ فإنّ إشارة $g(x)$ تكون كما يلي :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

جزء 2

1) إعتمادا على الجزء1 ، ندرس إتّجاه تغيّر الدّالة f .

*) f دالّة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ،

$$f'(x)=1+2xe^{-x}-e^{-x}(x^2+2)$$

$$=1-(x^2-2x+2)e^{-x} \ .$$

أي من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

*) إذا :

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

2) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f .

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad \begin{cases}(x-1)\to-\infty\\ (x^2+2)\to+\infty; e^{-x}\to+\infty\end{cases}$

* $\begin{cases}(x-1)\to+\infty\\ \left[(x^2+2)e^{-x}=\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{2}{e^x}\right]\to 0\end{cases} \ ; \ \lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$.

جدول تغيّرات الدّالة f يكون كما يلي :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) – أ) نبرهن أنّ $f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$.

لدينا من جهة : $f(\alpha)=\alpha-1+(\alpha^2+2)e^{-\alpha}$

من جهة أخرى α هو حلّ للمعادلة $g(x)=0$.

$g(\alpha)=0$ معناه $1-(\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha}=0$

معناه $(\alpha^2+2)e^{-\alpha}=1+2\alpha e^{-\alpha}$

في هذه الحالة وبالتّعويض نجد :

$$f(\alpha)=\alpha-1+1+2\alpha e^{-\alpha}$$

$$=\alpha+2\alpha e^{-\alpha}$$

أي : $f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$.

- ب) إيجاد حصر لـ $f(\alpha)$ إنطلاقا من حصر α .

حسب ما سبق : $0,35\le\alpha\le0,36$

إذا : $-0,36\le-\alpha\le0,35$.

بما أنّ الدّالة $\exp$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ينتج :

$e^{-0,36}\le e^{-\alpha}\le e^{-0,35}$ أي $0,6976\le e^{-\alpha}\le0,7046$

وبالتّالي : $1+2(0,6976)\le1+2e^{-\alpha}\le1+2(0,7046)$

أي : $2,3952\le1+2e^{-\alpha}\le2,4092$ ... (2)

من (1) و (2) :

$0,35\times(2,3952)\le\alpha(1+2e^{-\alpha})\le0,36\times(2,4092)$.

إذا : $0,834\le f(\alpha)\le0,87$

4) *) نبرهن أنّ (D) مستقيم مقارب لـ (C) عند $(+\infty)$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^2+2)e^{-x}]$
$=0$

إذا : في جوار $(+\infty)$ ، المستقيم (D) الّذي معادلته $y=x-1$ ، مستقيم مقارب للمنحني (C) .

***) نتحقّق أنّ (C) يقع أعلى (D) .**

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $(x^2+2)e^{-x}\succ0$ أي :

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، $[f(x)-(x-1)]\succ0$ وعليه :

(C) يقع أعلى المستقيم (D) .

6) *) نبيّن أنّ (T) يعامد (D).

- معامل توجيه المستقيم (D) يساوي 1 .
- $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس (T) .

لدينا : $f'(0)=g'(0)=-1$.

$f'(0)\times1=-1$.

جداء معاملي توجيه (D) و(T) يساوي (-1) وعليه :

(D) و(T) مستقيمان متعامدان .

***) نكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) .**

معادلة (T) معطاة بالعلاقة :

$y=f'(0)\times x+f(0)$ أي : $(T): y=-x+1$

6) إنشاء (D) ، (T) و (C) .

(أنظر الشّكل) .

7) – أ) نبيّن أنّ الدّالة h هي إحدى الدّوال الأصلية للدّالة $x\mapsto(-x^2-2x-4)$ على $\mathbb{R}$.

* الدّالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ... (1)

* من اجل كلّ x من $\mathbb{R}$:

$$h'(x)=(-2x-2)e^{-x}-e^{-x}(-x^2-2x+4)$$

$$=(-2x-2+x^2+2x+4)e^{-x}$$

$$=(x^2+2)e^{-x}$$

من (1) و (2) نستنتج أنّ الدّالّة h هي إحدي الدّوال الأصلية للدّالّة $x \mapsto (x^2+2)e^{-x}$.

- ب) نعيّن الدّالة الأصلية F للدّالة f والّتي تحقّق $F(0)=0$.

الدّالة $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x - (x^2+2x+4)e^{-x}$ هي إحدي الدّوال الأصلية للدّالة f علي $\mathbb{R}$.

في هذه الحالة الدّالة F تحقّق :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - (x^2+2x+4)e^{-x} + c \,/\, c \in \mathbb{R} \\ F(0) = 0 \end{cases} .$$

$F(0)=0$ يكافئ $c=4$.

إذا الدّالة F معرّفة علي $\mathbb{R}$ كما يلي :

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 4 - (x^2+2x+4)e^{-x}$.