الحلّ المفصّل

التّمرين الأوّل :

ما ورد فيه :
- الإرتباط الخطّي لشعاعين – معادلة مستوي –
- التّمثيل الوسيطي لمستقيم – المسافة بين نقطة ومستوي
- المسقط العمودي لنقطة على مستوي – حجم رباعي الوجوه

الحلّ :

1) *) تحقّق أنّ النّقط A ، B و C تعيّن مستويا .

لدينا ما يلي : $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$.

نلاحظ ما يلي :

$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}$ وهذا معناه :

لا يوجد عدد حقيقي k يحقّق : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$ وبالتّالي :

$\overrightarrow{AB}$ ليس مرتبط خطّيا مع $\overrightarrow{AC}$.

إذا النّقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تحدّد المستوي (ABC) .

$\overrightarrow{AB}$ ليس مرتبط خطّيا مع $\overrightarrow{AC}$
معناه
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ أساس للمستوي (ABC) .
معناه
$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعان موجّهان لـ (ABC)

***) تحقّق أنّ المعادلة $x - y + z - 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .**

لدينا ما يلي :

$$\begin{cases} x_A - y_A + z_A - 1 = 2 - 1 + 0 - 1 = 0 \\ x_B - y_B + z_B - 1 = 1 - 2 + 2 - 1 = 0 \\ x_C - y_C + z_C - 1 = 3 - 3 + 3 - 1 = 0 \end{cases} .$$

يمكن إيجاد تمثيل وسيطي للمستوي
ثمّ استنتاج معادلة ديكارتية والتّحقق بعد ذلك
أنّ هذه المعادلة مكافئة للمعادلة المعطاة

إحداثيات النّقط A ، B و C هي حل للمعادلة المعطاة وبالتّالي :

$x - y + z - 1$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) *) نبيّن أنّ المثلّث (ABC) متقايس الأضلاع .

يكفي أن نبيّن أنّ $AB = AC = BC$.

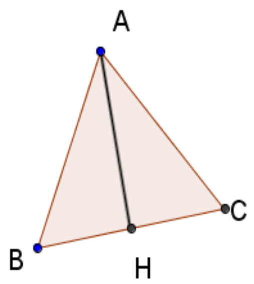
لدينا :

إذا : $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$: $AB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}$
$= \sqrt{6}$

إذا : $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$: $AC = \sqrt{1 + 2^2 + 1}$
$= \sqrt{6}$

إذا : $\overrightarrow{BC}(-2;-1;-1)$: $BC = \sqrt{4 + 1 + 1}$
$= \sqrt{6}$

$[AB = AC = BC]$ معناه ABC مثلّث متقايس الأضلاع.



***) تحقّق أنّ مساحة المثلّث ABC هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.**

يمكن اتّباع الطّريقة الآتية :

لتكن H المسقط العمودي للنّقطة A على $[BC]$

في هذه الحالة : $AH = AB \times \sin 60^0$.

وبالتّالي ، إذا كانت S هي مساحة المثلّث ABC فإنّ :

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \quad \text{أي} \quad S = \frac{1}{2} AB \times \sin 60^0 \times BC$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{6}$$

إذا : $S = \frac{3\sqrt{3}}{2} u.a$.

3) نعيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

الشّعاع $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

بما أنّ (Δ) عمودي على المستوي (ABC) فإنّ $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

في هذه الحالة: المستقيم (Δ) هو مجموعة النّقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : (1) ... $\overrightarrow{DM} = t.\vec{n}$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

من العلاقة (1) وباستعمال المركّبات السّلمية نحصل على التّمثيل الوسيطي الآتي :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 4+t \end{cases}$$

4)- أ) *) تعيين إحداثيات النّقطة E .

E هي المسقط العمودي للنّقطة D على المستوي (ABC) معناه

$$\begin{cases} \overrightarrow{DE} = k.\vec{n}; k \in \mathbb{R} \quad ...(2) \\ E \in (ABC) \ ... \ (3) \end{cases}$$

(2) تكافئ : $\begin{cases} x_E = 1+k \\ y_E = 1-k \\ z_E = 4+k \end{cases}$

(3) تكافئ : إحداثيات E حل لمعادلة المستوي (ABC)

أي : $1+k-1+k+4+k-1=0$ أي $3k+3=0$

وهذا معناه $k=-1$.

في هذه الحالة وبتعويض k بقيمته نجد : $E(0;2;3)$.

***) حساب المسافة بين النّقطة D والمستوي (ABC) .**

$$d(D;(ABC)) = \frac{|x_D - y_D + z_D - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{|1-1+4-1|}{\sqrt{3}}$$

$$d(D;(ABC)) = \sqrt{3}$$

- ب) تعيين مركزي سطحي الكرتين اللّذين يمسّان (ABC) في النّقطة E ونصف قطر كلّ منهما $\sqrt{3}$

عموما : يتعيّن تمثيل وسيطي لمستقيم بمعرفة نقطة وشعاع توجيه له .

البحث عن إحداثيات النقطة E يؤول إذا إلى البحث عن قيمة k

يمكن إتباع الطّريقة الآتية :
بما أنّ E هي المسقط العمودي للنّقطة D على المستوي ABC ينتج :
$d(D;(ABC)) = \|\overrightarrow{DE}\|$.
$\overrightarrow{DE}(-1;1;1)$ إذا : $DE = \sqrt{1+1+1}$
$= \sqrt{3}$.

** حسب ما سبق : $d\left(D;(ABC)\right)=DE$
$=\sqrt{3}$
إذا سطح الكرة الأوّل هو (S_1) مركزه النّقطة D ، نصف قطره $\sqrt{3}$
ويمسّ المستوي (ABC) في النّقطة E .
** أمّا سطح الكرة الثّاني (S_2) فهو سطح الكرة الّذي مركزه النّقطة I حيث I نظيرة النّقطة D بالنّسبة إلي E .
E منتصف $[ID]$ ، ينتج :

$\begin{cases}2x_E=x_I+x_D\\2y_E=y_I+y_D\\2z_E=z_I+z_D\end{cases}$ أي $\begin{cases}x_I=2x_E-x_D\\y_I=2y_E-y_D\\z_I=2z_E-z_D\end{cases}$ بالتّعويض نجد :

$I(-1;3;2)$.

5) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
ليكن v هو حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
الحجم v معطي بالعلاقة : $v=\frac{1}{3}S\times h$ حيث :
* S هي مساحة القاعدة أي مساحة المثلّث ABC
* h هو الإرتفاع أي DE .
بالتّعويض نجد :
$v=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}$ أي $v=\frac{3}{2}u.v$.

التّمرين الثّاني :

ما ورد فيه :
- خواصّ مرافق عدد مركّب – الشّكل الأسّي لعدد مركّب
-التّشابه المستوي المباشر – التّمثيل الوسيطي لنصف مستقيم.
- دستور موافر

الحل
I) تعيين العددين المركّبين α و β .
لدينا:

$\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ معناه $\begin{cases}\overline{2\alpha-\beta}=\overline{-3}\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$

معناه $\begin{cases}2\overline{\alpha}-\overline{\beta}=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$

* بالجمع طرفا لطرف نجد : $4\overline{\alpha}=-6-2i\sqrt{3}$
أي : $\overline{\alpha}=-\frac{3}{2}-2i\sqrt{3}$ وبالتّالي : $\underline{\alpha=-\frac{3}{2}+2i\sqrt{3}}$
*بالطّرح طرفا لطرف نجد : $-2\overline{\beta}=2i\sqrt{3}$ أي $\overline{\beta}=-i\sqrt{3}$.
وبالتّالي : $\underline{\beta=i\sqrt{3}}$.

II) 1) – أ) كتابة z_A و z_C علي الشّكل الأسّي

للتذكير :
من أجل كلّ عددين مركّبين z_1 و z_2 :
* $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ ، $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ ،
$\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$
*إذا كان $z\in\mathbb{R}$: $\overline{z}=z$.

يمكن أيضا وضع :
$\alpha=x+iy$ ، $\beta=x'+iy'$

- لدينا $|z_A|=\sqrt{3}$.

أي $z_A=\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$z_A=\sqrt{3}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$z_A=\left[\sqrt{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ معناه $\underline{z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

-ثمّ $z_A=z_Ce^{i\frac{\pi}{3}}$ معناه $z_C=\frac{z_A}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

أي $z_C=\left[\frac{\sqrt{3}}{1};\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right]$ وهذا معناه $\underline{z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$

z_C تخيّلي صرف و $\operatorname{Im}(z_C)\succ 0$
لأن :
$Arg(z_C)=\frac{\pi}{2}$

*) تعيين قيم العدد الطّبيعي n حتّى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\in\mathbb{R}_-^*$.

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)\in\mathbb{R}_-^*$ معناه $Arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n=(2k+1)\pi$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

بما أنّ $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)\equiv\arg(z_A)-\arg(z_C)[2\pi]$

$$\equiv\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

في هذه الحالة وحسب دستور موافر :

$\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\equiv\frac{n\pi}{3}[2\pi]$.

إذا: $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)\in\mathbb{R}_-^*$ معناه $\frac{n\pi}{3}=(2k+1)\pi$ حيث $k\in\mathbb{N}$

معناه $\underline{n=3(2k+1)}$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

للتّذكير :
z عدد مركّب غير معدوم :
*) $z\in\mathbb{R}^*$ معناه $\arg(z)=k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}^*$
*) $z\in\mathbb{R}_+^*$ معناه $\arg(z)=2k\pi$
*) $z\in\mathbb{R}_-^*$ معناه $\arg(z)=(2k+1)\pi$

ب-) تحقّق أنّ $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)+2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}$ **حقيقي .**

*) $\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، حسب دستور موافر :

$\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}=e^{i\frac{5\pi}{6}\times 2015}$.

$$\frac{5\pi}{6}\times 2015=\frac{10075\pi}{6}$$

$$=\frac{\pi}{6}+1679\pi$$

$= -\frac{5\pi}{6} + 1680\pi$.

$-\frac{5\pi}{6}$ هو القيس الرّئيسي المرفق بالقيس $\frac{10075\pi}{6}$ وعليه :

$$\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ أي $\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

*) $\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} = e^{-i\frac{5\pi}{6}\times 1962}$ لكن :

ومنه : $-\frac{5\pi}{6}\times 1962 = -1635\pi$

π هو القيس الرّئيسي المرفق بالقيس $-\frac{5\pi}{6}\times 1962$.

إذا : $\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} = e^{i\pi}$ أي $\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} = -1$.

*) $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = e^{i\frac{\pi}{2}\times 1435}$

$= e^{-i\frac{\pi}{2}}$ أي $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = -1$.

في هذه الحالة :

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) - 1 + i$$
$$= -\left(\sqrt{3}+1\right)$$

2) – أ)تحديد النّسبة وزاوية التشابه المستوي المباشر S الّذي مركزه O ويحوّل D إلى A .

إذا كان k هو هذه النّسبة و θ قيس الزّاوية فحسب التّعريف لدينا:

$S(D) = A$ معناه $\begin{cases} \frac{OA}{OD} = k \\ \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) = \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

* $OA = |z_A| = \sqrt{3}$ و $OD = |z_D| = \sqrt{2}$

إذا : $k = \sqrt{\frac{3}{2}}$

* $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OD}}}\right) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$$= \arg(z_A) - \arg(z_D) + 2k\pi$$
$$= \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

إذا : $\theta = \frac{7\pi}{12}$

يمكن كتابة العدد المركّب $\frac{z_A}{z_D}$ على شكله المثلّثي ثمّ إعطاء تفسير هندسي لطويلته ولعمدته

- ب) *) كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشّكل الجبري

لدينا : $\frac{z_A}{z_D}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2(1+i)}$ أي $\frac{z_A}{z_D}=\frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i)}{4}$

$$=\frac{-3+\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

*) استنتاج القيمة المضبوطة لكلّ من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

لدينا من جهة : $\frac{z_A}{z_D}=\left[\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{7\pi}{12}\right]$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

من جهة أخرى : $\frac{z_A}{z_D}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$

بالمطابقة بين الشّكلين المثلّثي والجبري نجد :

$$\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{-3+\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{6}}\end{cases}\quad \text{أي} \quad \begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

3) تعيين مجموعة النّقط $M(z)$ حيث $z=k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

نعلم أنّ $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ وبالتّالي : $z=k\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$$=k\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}\right)}$$

إذا : $z=\left(k\sqrt{2}\right)e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

بما أن $k\geq 0$ فإن المجموعة التي نبحث عنها هي نصف المستقيم $[Ot)$ المعرّف بـ : $\left([Ox);[Ot)\right)=\frac{5\pi}{6}$.

* $|z|=k\sqrt{2}$ ،
$|z|$ عدد متغيّر أمّا $\arg(z)$ ثابت.
$\arg(z)=\arg(z_A)$
$=\frac{5\pi}{6}$
النّقطة A هي إذا عنصر من هذه المجموعة.
* $[Ot)=[OA)$

التّمرين الثّالث :

ما ورد فيه :
- دراسة متتالية تراجعية (مبدأ الإستدلال بالتّراجع)
-المتتالية الهندسية – خواص الدّالة $\ln$

الحل :

1) حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 .

$u_1=(1+u_0)e^{-2}-1$ أي $u_1=(1+e^2-1)e^{-2}-1$

$u_1=0$

$u_2=(1+u_1)e^{-2}-1$ أي $u_2=e^{-2}-1$

$u_3=(1+u_2)e^{-2}-1$ أي $u_3=e^{-4}-1$.

2) نثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $1+u_n \succ 0$.

نستعمل مبدأ الإستدلال بالتّراجع .

نضع : $P(n):1+u_n \succ 0 \,;\, n\in\mathbb{N}$.

*) نتحقّق من صحّة $P(0)$.

فرضا : $u_0=e^2-1$ إذا $u_0 \succ 1$ ومنه : $P(0)$ صحيحة .

*) نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة أي أنّ $1+u_n \succ 0$

ونبيّن صحّة $P(n+1)$ أي نبيّن أنّ $1+u_{n+1} \succ 0$.

حسب فرضيّة التّراجع لدينا : $1+u_n \succ 0$.

بما أنّ $e^{-2} \succ 0$ فإنّ $(1+u_n)e^{-2} \succ 0$

أي $1+u_{n+1} \succ 0$.

ومنه : $P(n+1) \succ 0$.

* ممّا سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتّراجع ينتج :

من اجل كلّ عدد طبيعي n ، $1+u_n \succ 0$.

3) *) نبيّن أن (u_n) متتالية متناقصة.

لهذا نبيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n \prec 0$.

لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=(1+u_n)e^{-2}-1-u_n$$
$$=(1+u_n)e^{-2}-(1+u_n)$$

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=(1+u_n)(e^{-2}-1)$

لدينا : $\begin{cases}1+u_n \succ 0\\ (e^{-2}-1) \prec 0\end{cases}$ إذا : $(1+u_n)(e^{-2}-1) \prec 0$.

وعليه : المتتالية (u_n) متناقصة تماما في $\mathbb{N}$.

***) ننظر إن كانت (u_n) متقاربة .**

حسب ما سبق :

(u_n) محدودة من الأسفل بالعدد (-1) .

(u_n) متتالية متناقصة .

ومنه : المتتالية (u_n) متتالية متقاربة .

4) – أ) نثبت أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

لدينا ومن أجل كلّ عدد طبيعي n :

$v_{n+1}=3(1+u_{n+1})$ أي $v_{n+1}=3\left[1+(1+u_n)e^{-2}-1\right]$

$=3\left[(1+u_n)e^{-2}\right]$.

بما أنّ $u_n=\frac{1}{3}v_n-1 ...(1)$ ، بالتّعويض نجد :

$v_{n+1}=3\left[\left(1+\frac{1}{3}v_n-1\right)e^{-2}\right]$ أي $v_{n+1}=3\left(\frac{1}{3}v_n e^{-2}\right)$.

إذا من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $\underline{v_{n+1}=e^{-2}v_n}$ وهذا معناه:

$0 \succ (1+u_n)$ معناه $u_n \succ -1$.
(u_n) متتالية محدودة من لأسفل

المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-2}$ وحدّها الأوّل v_0

حيث: $v_0=3(1+u_0)$ أي $v_0=3e^2$.

ب-) *) كتابة v_n ثمّ u_n بدلالة n .

(*) v_n متتالية هندسية أساسها q وحدّها الأول v_0 . إذا عبارة حدّها العامّ v_n معطاة بالعلاقة :

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $v_n=v_0\times q^n$ -- بالتّعويض نجد :

$\underline{v_n=3e^2\times e^{-2n}}$ أو $\left[v_n=3e^{-2n+2}\right]$

(*) بتعويض v_n في العلاقة (1)نجد :

$u_n=\frac{1}{3}\left(3e^2\times e^{-2n}\right)-1$ أي $\underline{u_n=e^2\times e^{-2n}-1}$

***) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.**

$$\lim_{x\to+\infty} u_n=\lim_{x\to+\infty}\left(e^2\times e^{-2n}-1\right)$$

$=-1$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2n}=0$.

- جـ) نبيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$.

لدينا من جهة :

$$\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=\ln\left(v_0\times v_1\times...\times v_n\right)$$

من جهة أخري : الجداء $\left(v_0\times v_1\times...\times v_n\right)$ هو جداء $(n+1)$ حدّا الأولي من المتتالية الهندسية (v_n) .

يمكن كتابة هذا الجداء علي الشكل الآتي :

$$v_0\times v_1\times...\times v_n=v_0\times\left(v_0\times q\right)\times\left(v_0\times q^2\right)\times...\times\left(v_0\times q^n\right)$$

$$=\underbrace{\left(v_0\times v_0\times...\times v_0\right)}_{(n+1)\ \text{مرّة}}\times\left(q\times q^2\times...\times q^n\right)$$

$$=v_0^{\,n+1}\times q^{1+2+...+n}\ .$$

* المجموع $1+2+3+...+n$ هو مجموع n عددا طبيعيا غير المعدومة الأولي .

هذه الأعداد تشكّل حدود متعاقبة من متتالية حسابية حدّها الأوّل 1 وأساسها 1 .

ومنه : $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

في هذه الحالة :

$$\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=\ln\left[v_0^{\,n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$$

$$=\ln v_0^{\,n+1}+\ln q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=(n+1)\ln\left(3e^2\right)+\frac{n(n+1)}{2}\ln e^{-2}$$

$$=(n+1)(\ln 3+2)-n(n+1)$$

إذا : $\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$

المتتالية الهندسية (v_n) متقاربة نحو 0 لكون أساسها q يحقّق : $-1\prec q\prec 1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n=0$

$$\lim_{x\to+\infty} u_n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}v_n-1\right)$$
$=0$

$\ln e=1$
$\ln 3e^2=\ln 3+2$
$\ln e^{-2}=-2$

التّمرين الرّابع :

ما ورد فيه :
- خواصّ دالة استنتاجية إعتمادا علي تمثيلها البياني – مبرهنة القيم المتوسطة – الدّراسة والتمثيل البياني لدالة – الدّالة الأصلية لدالة F والتي تحقّق $F(x_0)=k$.

الحلّ :

I) 1 -) بقراءة بيانية نحدّد الوضع النّسبي لـ (γ) **و** (Δ) .

الوضع النّسبي لـ (γ) و (Δ) كما يلي :

*) (γ) أسفل (Δ) علي المجال $]0;\alpha[$.

*) (λ) يقطع (Δ) في النّقطة ذات الفاصلة α .

*) (γ) أعلي (Δ) علي المجال $]\alpha;+\infty[$.

2 -) إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

لدينا : $g(x)=x-3+\ln x$

$=\ln x-(-x+3)$.

إشارة $g(x)$ هي إذا إشارة الفرق $\ln x-(-x+3)$.

هذه الإشارة هي إذا مستنتجة من الوضع النّسبي لـ (γ) و(Δ) .

حسب ما سبق ، إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

3 -) تحقّق أنّ $2{,}2\prec\alpha\prec2{,}3$

لدينا : $g(2{,}2)\approx-0{,}011$ ، $g(\alpha)=0$ ، $g(2{,}3)\approx0{,}132$.

نلاحظ ما يلي : $g(2{,}2)\prec g(\alpha)\prec g(2{,}3)$.

بما أنّ g مستمرّة ومتزايدة تماما فهي تحفظ التّرتيب .وعليه :

$2{,}2\prec\alpha\prec2{,}3$.

* علي كلّ مجال يكون فيه التّمثيل البياني لدالة أعلي حامل محور الفواصل ، تأخذ هذه الدّالة قيما موجبة

أو $g(2{,}2)\times g(2{,}3)\prec0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\succ0}\ln x=-\infty$

II) 1 -) حساب $\lim\limits_{x\to\succ0}f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$$\lim_{x\to\succ0}f(x)=+\infty;\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\to-\infty\\(\ln x-2)\to-\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\to1\\(\ln x-2)\to+\infty\end{cases}$$

2 -) *) تثبت أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

لدينا : $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}(\ln x-2)+\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

$=\dfrac{\ln x-2}{x^2}+\dfrac{x-1}{x^2}$

$=\dfrac{x-3+\ln x}{x^2}$ أي $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

*) تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f .

نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتّالي فإنّ جدول تغيّرات الدّالة f يكون كما يلي :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$	

3 -) *) نبيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

لدينا من جهة : $f(\alpha)=\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)$.

من جهة أخري α هو حلّ للمعادلة $g(x)=0$.

$g(\alpha)=0$ معناه $\alpha-3+\ln\alpha=0$

معناه $\ln\alpha=-\alpha+3$.

بتعويض $\ln\alpha$ بقيمته نجد :

$f(\alpha)=\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)(-\alpha+3-2)$ أي $f(\alpha)=\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)$

$=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

*) إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا ما يلي : $2,2\prec\alpha\prec 2,3$ معناه $1,2\prec\alpha-1\prec 1,3$

معناه $1,44\prec(\alpha-1)^2\prec 1,69$

لدينا إذا : $\begin{cases}1,44\prec(\alpha-1)^2\prec 1,69\\ \dfrac{1}{2,3}\prec\dfrac{1}{\alpha}\prec\dfrac{1}{2,2}\end{cases}$ ومنه :

$1,44\times\dfrac{1}{2,3}\prec(\alpha-1)^2\times\dfrac{1}{\alpha}\prec 1,69\times\dfrac{1}{2,2}$ أي :

$0,626\prec\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}\prec 0,768$ وبالتّالي :

$-0,77\prec-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}\prec-0,62$ إذا: $-0,77\prec f(\alpha)\prec-0,62$

4) دراسة الوضع النّسبي لـ (C_f) وحامل محور الفواصل .

لهذا ندرس في D_f إشارة $f(x)$.

إشارة $f(x)$ من إشارة الجداء $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)(\ln x-2)$.

*) إشارة $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ من إشارة $(x-1)$ وهي كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

*) لتحديد إشارة $(\ln x-2)$ نحلّ في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة

- الدّالة مربّع متزايدة تماما علي المجال $[0;+\infty[$ فهي إذا تحفظ التّرتيب.

-الدّالة مقلوب متناقصة تماما علي المجال $]0;+\infty[$ فهي لا تحفظ التذرتيب

$(\ln x-2)\geq 0$ .... (1)

(1) تكافئ $\ln x\geq 2$

تكافئ $x\geq e^{2}$.

إشارة $(\ln x-2)$ كما يلي :

x	0		e^{2}		$+\infty$
$\ln x-2$		$-$	0	$+$	

في هذه الحالة ، إشارة $f(x)$ مستنتجة من الجدول الآتي :

x	0		1		e^{2}		$+\infty$
$1-\dfrac{1}{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

-- الوضع النّسبي لـ (C_f) وحامل محور الفواصل يكون كما يلي :

*) (C_f) أسفل حامل محور الفواصل على كلّ من المجالين

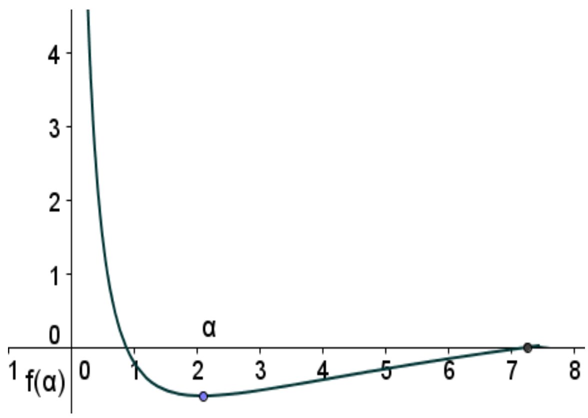
$]0;1[$ و $]e^{2};+\infty[$.

*) (C_f) أسفل حامل محور الفواصل على المجال $]1;e^{2}[$.

*) (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النّقطتين ذات الإحداثيتين

$(1;0)$ و $(e^{2};0)$

***) إنشاء (C_f) على المجال $]0;e^{2}]$.**



III) – 1) نبيّن أنّ منحني الدّالة F يقبل مماسّين موازيين لحامل محور الفواصل .

معناه : نبيّن أنّ المعادلة $F'(x)=0$ تقبل حلّين متمايزين .

$F'(x)=0$ معناه $f(x)=0$

معناه $x=1$ أو $x=0$.

ومنه المطلوب .

2) *) نبيّن أنّ الدّالة $h:x\mapsto x\ln x-x$ دالّة أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدّالة $x\mapsto \ln x$.

الدّالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا :

$h'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}.x-1$ أي :

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$: $h'(x)=\ln x$

ممّا سبق : الدّالة $x \mapsto x\ln x - x$ هي إذا إحدى الدّوال الأصليّة للدّالة $x \mapsto \ln x$.

*) إستنتاج عبارة $F(x)$.

لدينا ما يلي :

$$f(x) = \ln x - 2 - \frac{1}{x}\ln x + 2\frac{1}{x} .$$

لدينا من جهة وبما أنّ F هي إحدي الدّوال الأصلية للدّالة f فإنّ :

$F(x) = x\ln x - x - 2x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2\ln x + c$ حيث : $c \in \mathbb{R}$

من جهة أخري :

$F(1) = -3$ معناه $1\ln 1 - 1 - 2(1) - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 + 2\ln 1 + c = -3$

معتاه $-3 + c = -3$ أي $c = 0$.

في هذه الحالة :

$$F(x) = \left(x + 2 - \frac{1}{2}\right)\ln x - 3x .$$

<u>واللّه أعلم</u>

* الدّالة $u'u^n$ تقبل كدالة أصلية الدّالة $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$.

$x \mapsto \frac{1}{x}\ln x$ من الشكل $u'u$ حيث :

$u(x) = \ln x$