السنة الثالثة رياضيات – علوم تجريبية
تمارين مختارة من بكالوريات أجنبية

إعداد : شيح

الهنـــدســـة الـفـضائية

التمرين الأول :

الفضاء منسوب إلي المعلم المتعامدوالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط :

$D(1,1,-2);C(0,-2,3);B(-1,2,4);A(2,1,-1)$

.

نعتبر أيضا المستوي (P) المعرف بالمعادلة

$x-2y+z+1=0$.

في كل مما يلي ، برر إن كانت الجملة المقترحة صحيحة أم خاطئة:

(1) النقط $C;B;A$ تحدد مستويا .

(2) المستقيم (AC) جزء من المستوي (P).

(3) إحدي المعادلات الديكارتية للمستوي (ABD) هي :

$x+8y-z-11=0$.

(4) المستقيم (AC) يقبل كتمثيل وسيطي الجملة :

$$\begin{cases} x=2k \\ y=2+3k \quad ; \quad k\in\mathbb{R} \\ z=3-4k \end{cases}$$

(5) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان .

(6) المسافة بين النقط C والمستوي (P) تساوي $4\sqrt{5}$.

(7) سطح الكرة الذي مركزه D ونصف قطره $\frac{\sqrt{6}}{3}$ مماس للمستوي (P).

(8) النقطة $E(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3})$ هي المسقط العمودي للنقطة C علي المستوي (P).

التمرين الثاني:

لكل سؤال من الأسئلة الآتية جواب وحيد.
إختر في كل مرة الجواب الصحيح مع التبرير .

الفضاء منسوب إلي المعلم المتعامدوالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

(I) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث :

$$\begin{cases} 2x-6y+2z-7=0 \\ -x+3y-z+5=0 \end{cases}$$

هي :

(أ) : المجموعة الخالية	(ب) : مستقيم
(ج) : مستوي	(د) : نقطة

(II) المستقيمان المعرفان بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=-1+t\,;t\in\mathbb{R} \\ z=2-3t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=2+k \\ y=-2-k\,;k\in\mathbb{R} \\ z=4+2k \end{cases}$$

(أ): متوازيان تماما	(ب) : منطبقان
(ج): متقاطعان	(د): لا يقعان في نفس المستوي

(III) المسافة بين النقطة $A(1,-2,1)$ والمستوي المعرف بالمعادلة : $-x+3y-z+5=0$ تساوي :

(أ) : $\frac{3}{11}$	(ب) : $\frac{3}{\sqrt{11}}$
(ج) : $\frac{1}{2}$	(د) : $\frac{8}{\sqrt{11}}$

(IV) المسقط العمودي H للنقطة $B(1,6,0)$ علي المستوي المعرف بالمعادلة : $-x+3y-z+5=0$ يحقق :

(أ) : $H(3,1,5)$	(ج) : $H(3,0,2)$
(ب) : $H(2,3,1)$	(د) : $H(-2,3,-6)$

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلي المعلم المتعامدوالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقطتين : $A(3,1,3)$ و $B(-6,2,1)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة : $x+2y+2z=5$.

لكل سؤال من الأسئلة الآتية جواب وحيد.
إختر في كل مرة الجواب الصحيح مع التبرير .

1) مجموعة النقط M حيث : $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2$ هي :

(أ): مستوي	(ب) : سطح كرة	(ج): المجموعةالخالية

2) احداثيات المسقط العمودي H للنقطة A علي (P) هي :

(أ) : $(\frac{11}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	(ب) : $(\frac{8}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3})$	(ج) : $(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$

3) سطح الكرة الذي مركزه B ونصف قطره 1:

(أ) يقطع (P) حسب دائرة	(ب) : مماس لـ(P)	(ج) : لا يقطع (P)

4) إذا كان (D) هو المستقيم الذي يشمل النقطة A والذي شعاع توجيهه $\vec{u}(1,2,-1)$ و (D') المستقيم المعرف بالجملة :

$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3+t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

فإن المستقيمان (D) و (D') :

(أ) : متوازيين	(ب) : متقاطعيين	(جـ) :لايقعان في نفس المستوي

5) مجموعة النقط M المتساوية البعدين عن النقطتين A و B هي :

(أ) :المستقيم المعرف بالجملة $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - t \\ y = \frac{3}{2} - 7t , t \in \mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases}$	(ب) :المستوي ذو المعادلة : $9x - y + 2z + 11 = 0$ (جـ) : المستوي ذو المعادلة : $x + 7y - z - 7 = 0$	

التمرين الرابع :

تعطى النقطة $S(1,-2,0)$ و المستوي (P) المعرف بالمعادلة :

. $x + y - 3z + 4 = 0$

لكل سؤال من الأسئلة الآتية جواب وحيد.

إختر في كل مرة الجواب الصحيح مع التبرير .

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) المار بالنقطة S والعمودي على المستوي (P) هو الجملة :

(أ) : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t , t \in \mathbb{R} \\ z = -3 \end{cases}$	(ب) : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t , t \in \mathbb{R} \\ z = 1-3t \end{cases}$
(جـ) : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t , t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$	(د): $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t , t \in \mathbb{R} \\ z = -3-3t \end{cases}$

2) إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (D) و (P) هي :

(أ) $(-4,0,0)$	(ب): $(\frac{6}{5},-\frac{9}{5},-\frac{3}{5})$	(جـ): $(\frac{7}{9},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$	(د) : $(\frac{8}{11},-\frac{25}{11},\frac{9}{11})$

3) المسافة بين $S(1,-2,0)$ والمستوي (P) تساوي :

(أ) : $\frac{\sqrt{11}}{3}$	(ب) : $\frac{3}{\sqrt{11}}$	(جـ) : $\frac{9}{\sqrt{11}}$	(د) : $\frac{9}{11}$

4) نعتبر سطح الكرة Sp الذي مركزه S ونصف قطره 3.

تقاطع Sp والمستوي (P) هو :

(أ)	(ب)

النقطة $I(1,-5,0)$	الدائرة ذات المركز H ونق $3\sqrt{\frac{10}{11}}$
(جـ) الدائرة ذات المركز S ونق 2	(د) الدائرة ذات المركز H ونق $\frac{3\sqrt{10}}{11}$

التمرين الخامس :

الفضاء منسوب إلي المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط :

$I(\frac{3}{5},4,-\frac{9}{5})$; E(3,2,-1); D(1,0,-2);C(3,1,-3); B(0,4,-3);A(2,4,1)

أنظر، مبررا في كل مرة جوابك ، إن كانت الجملة المقترحة صحيحة أم خاطئة :

(I) إحدي المعادلات الديكارتية للمستوي (ABC) هي :

. $2x + 2y - z - 11 = 0$

(II) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D علي المستوي (ABC)

(III) المستقيم (AB) عمودي علي المستقيم (CD) .

(IV) المستقيم (CD) معرف بالتمثيل الوسيطي الآتي :

$$\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -1+t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1-t \end{cases}$$

(V) النقطة I نقطة من المستقيم (AB).

التمرين السادس :

في الفضاء المنسوب إلي المعلم المتعامدوالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، تعطى النقط

. $C(2,0,0);B(0,4,0);A(0,0,2)$

نسمي I منتصف $[BC]$ ، G مركز المسافات المتساوية للنقط $A;B;C$ و H المسقط العمودي للنقطة O علي المستوي (ABC) .

في كل مما يلي ، انظر إن كانت الجملة المعطاة صحيحة أم خاطئة مع إعطاء التبرير .

(I) مجموعة النقط M من الفضاءحيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$ هو المستوي (AIO) .

(II) مجموعة النقط M من الفضاءحيث :

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

هو سطح الكرة التي قطرها $[BC]$.

(III) حجم رباعي الوجوه $OABC$ يساوي 4 .

(IV) أحدي المعادلات الديكارتية للمستوى (ABC) هي :

$2x+y+2z=4$ وأحداثيات النقطة H هي: $(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9})$.

(V) المستقيم (AG) يقبل كتمثيل وسيطي الجملة :

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t ; t\in\mathbb{R} \\ z=2-2t \end{cases}$$

التمرين السابع :

الفضاء منسوب إلي المعلم المتعامدوالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

(P) المستوى المعرف بالمعادلة : $x+2y-z+1=0$.

(P') المستوى المعرف بالمعادلة: $-x+y+z=0$.

A هي النقطة ذات الإحداثيات $(0,1,1)$.

1) برهن أن (P) عمودي علي (P').

2) ليكن (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+t \\ y=-\frac{1}{3};t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

برهن أن (P) و(P') ينقاطعان وفق (d).

3) أحسب المسافة بين A و(P) و (P').

4) أستنتج المسافة بين A و (d) .

التمرين الثامن :

في الفضاء المنسوب إلي المعلم المتعامدوالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر النقاط الآتية :

$D(4,-2,5);C(-1,-3,2);B(0,1,4);A(1,2,3)$ والشعاع $\vec{n}(2,-1,1)$.

1 °) أ) أثبت أن النقاط C,B,A ليست في استقامية .

ب) بين أن الشعاع $\vec{n}$ شعاع ناضم للمستوي (ABC) .

جـ) عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2 °) ليكن (Δ) المستقيم المعرف بالجملة :

$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t , t\in\mathbb{R} \\ z=4-t \end{cases}$$

بين أن النقطة D نقطة من المستقيم (Δ) وأن (Δ) عمودي علي المستوي (ABC) .

3 °) نسمي E المسقط العمودي لـ D علي المستوي (ABC)

بين أن النقطة E هي مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين التاسع :

الفضاء منسوب إلي المعلم المتعامدوالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نأخذ النقطة $A(-1,2,3)$ والمستقيم D الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x=9+4t \\ y=6+t , t\in\mathbb{R} \\ z=2+2t \end{cases}$$

الهدف من التمرين هو حساب المسافة d بين النقطة A والمستقيم D ، بطريقتين مختلفتين .

(I)

1 °) أ) أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A والعمودي علي D .

ب) تحقق أن النقطة $B(-3,3,-4)$ تنتمي إلي D .

جـ) أحسب المسافة d_b بين النقطة B والمستوي (P)

د) عبر عن المسافة d بدلالة d_b والطول AB .

إستنتج القيمة المضبوطة لـ d .

(II) لتكن M نقطة من المستقيم D .

** عبر عن AM^2 بدلالة t .

** أوجد قيمة d .

التمرين العاشر :

الفضاء منسوب إلي المعلم المتعامدوالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستوى (P) المعرف بالمعادلة: $2x+y-2z+4=0$

والنقاط : $C(4,-2,5);B(1,2,4);A(3,2,6)$.

1 °) أ) أثبت أن النقط C,B,A تحدد مستويا .

ب) تحقق أن هذا المستوي هو المستوي (P).

2 °) أ) برهن أن المثلث ABC قائم .

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة O والعمودي علي المستوي (P) .

جـ) لتكن النقطة K المسقط العمودي للنقطة O علي (P) .

أحسب المسافة OK .

د) أحسب حجم لرباعي الوجوه $OABC$.

3 °) في هذا السؤال ، نعتبر الجملة المثقلة :

$\{(O,3);(A,1);(B,1);(C,1)\}$.

أ) تحقق أن هذه الجملة تقبل مرجحا G .

ب) نسمي I مركزثقل المثلث ABC.

برهن أن G ينتمي إلي المستقيم (OI) .

جـ) أحسب المسافة بين G والمستوي (P) .

4 °) لتكن Σ مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق العلاقة :

$\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$.

** عين المجموعة Σ.

** ما هي طبيعة النقط المشتركة بين (P) و Σ.

التمرين 11 :

الفضاء منسوب إلي المعلم المتعامدو المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

(I) نعتبر المستوي (P) المعرف بالنقطة $B(1,-2,1)$ والشعاع الناضمي $\vec{n}(-2,1,5)$ وليكن $\Re$ المستوي الذي معادلته : $x+2y-7=0$.

1 °) بين أن (P) و $\Re$ متعامدان.

2 °) بين أن تقاطع المستويين (P) و $\Re$ هو المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $C(-1,4,-1)$ والذي شعاع توجيهه $\vec{u}(2,-1,1)$.

3 °) لتكن $A(5,-2,-1)$.

أحسب بعد النقطة A عن المستوي (P) ثم بعد النقطة A عن المستوي $\Re$.

(II) من أجل كل عدد حقيقي t نعرف النقطة M_t ذات الإحداثيات $(1+2t,3-t,t)$.

1 °) عين بدلالة t الطول AM.

2 °) نضع $f(t)=AM$.

أدرس في $\mathbb{R}$ إتجاه تغير الدالة f.

وضح القيمة الحدية الصغري للدالة f.

فسر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغري.

التمرين 12 :

في الفضاء منسوب إلي المعلم المتعامدو المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1,1,0);B(1,2,1);C(3,-1,2)$.

1 °) أ) بين أن النقط A, B, C ليست في استقامية.

ب) بين أن المعادلة $2x+y-z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2 °) نعتبر المستووين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين $x+2y-z-4=0$ و $2x+3y-5z=0$ علي الترتيب.

برهن أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (d) الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

3 °) عين تقاطع المستويات (ABC)، (P) و (Q).

4 °) عين بعد النقطة A عن المستقيم (d).

التمرين 13 :

(I) A و D نقطتان من الفضاء.

نسمي I منتصف القطعة المستقيمة $[AD]$.

1 °) أثبت أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء :

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$.

2 °) أستنتج المجموعة (E)، مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة :

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$.

(II) ننسب الفضاء إلي المعلم المتعامدو المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(3,0,0);B(0,6,0);C(0,0,4);D(-5,0,1)$

1 °) أ) تحقق أن $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ شعاع ناضمي للمستوي (ABC).

ب) عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2 °) أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي علي المستوي (ABC) والمار بالنقطة D.

ب) استنتج إحداثيات النقطة H، المسقط العمودي للنقطة D علي المستوي (ABC).

جـ) أحسب المسافة بين D والمستوي (ABC).

د) برهن أن النقطة H تنتمي غلي المجموعة (E) المعرفة في الجزء (I).