## الموضوع الثاني

**التمرين الأول: (04,5 نقطة)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتين $A\left(5;-1;-2\right)$ و $B\left(3;12;-7\right)$ .

$(\Delta)$المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $(k\in\mathbb{R})$ ; $\begin{cases} x=1+3k \\ y=1+2k \\ z=4k \end{cases}$ .

1) أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta')$ الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{u}\left(-2;1;1\right)$ شعاع توجيه له .

ب) بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$متعامدان ، ثمّ تحقق أنّ النقطة $C\left(1;1;0\right)$ نقطة تقاطعهما.

2) $(P)$ المستوي المعيّن بالمستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$.

أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}\left(2;11;-7\right)$ ناظمي للمستوي $(P)$، ثمّ جد معادلة ديكارتية له.

ب) بيّن أنّ النقطة $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(P)$.

3) $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان و $(P')$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء المعرفة بـ : $\begin{cases} x=3-\beta \\ y=12+12\alpha+9\beta \\ z=-7-6\alpha-11\beta \end{cases}$

أ) أثبت أنّ المجموعة $(P')$ هي مستوٍ ثمّ تحقق أنّ $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة ديكارتية له .

ب) عيّن إحداثيات $D$ و $E$ نقطتي تقاطع المستوي $(P')$ مع المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$على الترتيب.

جـ) احسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$.

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

**I)** $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ: $f(x)=\dfrac{5x}{x+2}$ .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[0;+\infty[$ : $f(x)\geq 0$ .

**II)** $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1\leq u_n\leq 3$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ، ثمّ استنتج أنها متقاربة .

2) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$ .

أ) برهن أنّ $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ ، يطلب حساب حدها الأول $v_0$ .

ب) اكتب بدلالة $n$ عبارة $v_n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

جـ) احسب نهاية المتتالية $(u_n)$.

3) اكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+...+\dfrac{1}{u_n}$ .

**التمرين الثالث: (04,5 نقطة )**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ . $A$ ، $B$ و $C$ نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$ .

أ) اكتب $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر $S$ مركزه $B$ ويحوّل النقطة $C$ إلى النقطة $A$ يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) أ) عيّن لاحقة النقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

ب) عيّن $(E)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ والتي تحقق : $\left|z-z_A\right|=\left|\overline{z}-z_B\right|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق $z$ .

ج) عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما $\theta$ يتغير على $\mathbb{R}$ ثم تحقّق أنّ النقطة $A$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ .

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط)**

I) $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+\left(x^2+x-1\right)e^{-x}$ .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2 ) أ ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $-1{,}52<\alpha<-1{,}51$ .

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

II) $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، ( وحدة الطول $1cm$ ) .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=-g(x)$ .(حيث $f'$ هي الدالة المشتقة للدالة $f$ ).

ج) شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ، ( نأخذ $f(\alpha)\approx 0{,}38$ ) .

د) عيّن دون حساب: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$ .

ب) ادرس وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

ج) بيّن أنّ للمنحنى $\left(C_f\right)$ نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

د) ارسم $(\Delta)$ و $\left(C_f\right)$ على المجال $]-2;+\infty[$ .

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-x)e^x+\left(x^2+3x+2\right)=0$ على المجال $]-2;+\infty[$.

III) $h$ و $H$ الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ .

1) عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حتّى تكون الدالة $H$ دالة أصلية للدالة $h$ على $\mathbb{R}$ .

2) أ) احسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$ .

**انتهى الموضوع الثاني**