الموضوع 03

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية　　　　　　ثانوية عالم عبد الحميد الخاصة

الشعبة: علوم تجريبية　　　　　　المدة: 3 ساعات و نصف

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات　　　دورة ماي 2012.

الموضوع 3

التمرين الأول (06 نقط)

1) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1-أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$.

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول 2cm .

أ- احسب نهاية الدالة f عند : 0 ، فسّر بيانيا هذه النتيجة

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

جـ - أثبت أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$ مقارب للمنحني (C) .

د- عيّن الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) على المجال $]0 ; +\infty[$ ، بالخصوص عيّن إحداثيي النقطة A ، تقاطع (C) و (Δ) .

3) أ - أدرس تغيرات الدالة f

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أثبت وجود نقطة وحيدة B من المنحني (C) ، حيث يكون المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة B موازيا للمستقيم (Δ) .

عيّن إحداثيي النقطة B .

5) أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$ ، حل وحيد α يحقق : $0,34 < \alpha < 0,35$.

6) أرسم في المعلم السابق : المستقيم (Δ) . . والمنحني (C) والمماس (T) عند النقطة B .

التمرين الثاني (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ . .

(P) و (P') المستويان اللذان معادلتيهما عل الترتيب : (P). .. $x + 2y - z + 1 = 0$　　(P')... $-x + y + z = 0$

لتكن النقط : $A(1,1,0)$. ، $B(2,0,3)$ ، $C(0,-2,5)$ ، $D(1,-5,5)$

1) أثبت أنّ المستويين (P) و (P') متعامدان

2) ليكن (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $(t \in \Re)$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

أ – أثبت أنّ تقاطع المستويين (P) و (P') هو المستقيم (d) .

ب – هل الكرة ذات المركز $W(3,3,0)$ ونصف القطر 5 ، مماسة للمستوي الذي إحدى معادلاته : $2x + 2y + z + 3 = 0$. ؟

جـ - هل النقط : A , B ,C , D من نفس المستوي ؟

التمرين الثالث (05 نقط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln u_n$, حيث الرمز ln يشير إلى اللوغاريتم النيبري والرمز e إلى أساسه

1) أ - أثبت من أجل كل عدد طبيعي n يكون لدينا : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ واستنتج أنّ : v_n هو الحد العام لمتتالية هندسية ن يطلب تعيين حدّها الأول وأساسها .

ب – أكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \quad .... \times u_n$

أ –أثبت أنّ : $P_n = e^{S_n}$

ب - عبّر عن S_n بدلالة n و استنتج عبارة P_n بدلالة n

جـ - أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ واستنتج نهاية المتتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

التمرين الرابع (05 نقط)

المستوي المركب (P) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ الوحدة 4 cm .

نسمي B النقطة ذات اللاحقة i ، والنقطة M_1 ذات اللاحقة $z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$.

1) عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب z_1

2) لتكن M_2 النقطة ذات اللاحقة z_2 ، صورة النقطة M_1 ، بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ - عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب z_2

ب - أثبت أنّ النقطة M_2 تنتمي إلى المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

3) لتكن النقطة M_3 ذات اللاحقة z_3 ، صورة النقطة M_2 ، بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته $\sqrt{3}+2$

أ – أثبت أنّ : $z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$.

ب – أثبت أنّ النقطتين M_1 و M_3 تنتميان إلى الدائرة ذات المركز B ونصف القطر $\sqrt{2}$

4) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، تختلف عن النقطة B ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث : $z' = \frac{1}{i-z}$

عيّن المجموعة (E) للنقط M من المستوي والتي تختلف عن النقطة B بحيث تنتمي النقطة M' للدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1