Cursus pharmacie-ingénieurs
Examen du 22 mai 2012 – Durée : 2 heures
Documents autorisés : notes manuscrites, polycopié.
Équipements électroniques interdits

Exercice 1

1. Établir si la série $\sum(-1)^n$ est convergente et si c'est le cas calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

2. Établir si la série $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$ est convergente et si c'est le cas calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$.

Exercice 2 Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$. Démontrer que

$$\frac{77}{108} \leq S \leq \frac{85}{108}.$$

(*Indication :* considérer la décomposition "somme partielle+reste" $S = S_2 + R_2$).

Exercice 3 Soit $a > 0$.

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} a^n$.

2. Calculer le rayon de convergence R_a de la série entière suivante :

$$\sum \frac{n}{1+a^n} x^n.$$

3. En déduire le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{n}{1+a^n} x^{2n}.$$

Exercice 4 Démontrer que **seulement l'une** des deux équations suivantes possède comme solution une fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ développable en série entière. Préciser laquelle et écrire la solution obtenue.

i) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad xf'(x) - f(x) = \cos(x)$,

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad xf'(x) - f(x) = \sin(x)$.