Corrigé

Solution de l'exercice 1

La première série diverge parce que le terme général $(-1)^n$ ne tend pas vers 0. On ne peut pas calculer sa somme.

Soit $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$. On a $x_n = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$. La somme partielle d'ordre n est $S_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$. Donc $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}$. La deuxième série est alors convergente de somme $\frac{3}{2}$.

Solution de l'exercice 2

La suite $\frac{1}{n^n}$ est positive et décroissante vers zéro. Le théorème des séries alternées implique que la série est convergente. On a $S = S_2 + R_2$, où $S_2 = 1 - \frac{1}{4}$ est la somme partielle d'ordre 2 et $R_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$. Le même théorème fournit l'inégalité $|R_2| \leq \frac{1}{3^3}$. Donc,

$$-\frac{1}{3^3} \leq S - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{3^3},$$

ce qui donne $\frac{77}{108} \leq S \leq \frac{85}{108}$.

Solution de l'exercice 3

On a

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1. \end{cases}.$$

Calculons, pour la première série,

$$\frac{1}{R_a} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(1+a^n)}{(1+a^{n+1})n} = \begin{cases} 1, & 0 < a \leq 1 \\ \frac{1}{a}, & a > 1. \end{cases}$$

Le rayon de convergence de la première série est alors $R_a = \max\{1, a\}$.
Pour calculer le rayon de convergence de la deuxième série, posons $y = x^2$. La discussion précédente montre que $\sum \frac{n}{1+a^n} y^n$ converge pour $|y| < \max\{1, a\}$ et diverge pour $|y| > \max\{1, a\}$. Donc la série $\sum \frac{n}{1+a^n} x^{2n}$ converge pour $|x| < \max\{1, \sqrt{a}\}$ et diverge pour $|x| > \max\{1, \sqrt{a}\}$. Le rayon de convergence de la deuxième série est alors $R_a = \max\{1, \sqrt{a}\}$.

Solution de l'exercice 4

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On a $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Donc

$$xf'(x) - f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n-1)x^n.$$

La première équation donne alors

$$-a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Mais alors,[1] $a_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n-1)}$ et $a_{2n+1} = 0$. Donc

$$f(x) = -1 + \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n-1)} x^{2n}$$

est la solution de la première équation.

De la même manière, on voit que la deuxième équation ne possede pas de solution développable en série entière. En effet, on aurait dans ce cas

$$-a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

La comparaison des coefficients de x^1 donne $a_1 \cdot 0 = -1$ qui est impossible.

[1] On utilise ici que si deux séries entières convergent vers la même somme, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ alors $\alpha_n = \beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ces coefficients sont donnés par $\frac{S^{(n)}(0)}{n!}$, où $S(x)$ est la somme de la série).