Corrigé

Solution de l'exercice 1. Pour tout $x \in [0, \pi]$ fixé, on vérifie facilement que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sin(x).$$

Montrons que la convergence de (f_n) vers la fonction $f(x) = \sin(x)$ est uniforme dans $[0, \pi]$. En effet,

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1 - x\sin x - \sin x}{n^2 + x + 1} \right| \le \frac{2 + \pi}{n^2 + 1}.$$

Ainsi, $\sup_{x\in[0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{2+\pi}{n^2+1} \to 0$ pour $n \to \infty$. La convergence uniforme de (f_n) vers f dans $[0, \pi]$ nous autorise à écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\, dx = \int_0^\pi f(x)\, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^\pi = 2.$$

Solution de l'exercice 2. On a $f(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$ et $f'(x) = \frac{-2}{(n+x)^3}$. Les fonctions $|f(x)|$ et $|f'(x)|$ étant décroissantes edans $[0, +\infty[$, on a

$$\sup_{x\ge 0} |f(x)| = |f(0)| = \frac{1}{n^2}, \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\ge 0} |f'(x)| = |f'(0)| = \frac{2}{n^3}.$$

Les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{2}{n^3}$ étant convergentes, on en déduit que $\sum f_n(x)$ et $\sum f_n'(x)$ sont normalement convergentes, et donc uniformément convergentes dans $[0, \infty[$. Les hypothèses du théorème de dérivation des séries sont satisfaites et l'on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Cette formule montre que $S'(x) < 0$ pour tout $x \ge 0$. Donc S est décroissante dans $[0, \infty[$. De plus, la convergence uniforme de $\sum f_n(x)$ autorise l'échange de lim et $\sum$: on a alors

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x\to|\infty} f_n(x) \right) = 0,$$

car on a clairement $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Observons que $S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Avec ces informations, il est aisé de tracer le graphe de la fonction $S(x)$.

Solution de l'exercice 3. La première série est de la forme $\sum a_n x^n$, avec $a_n = (-1)^n 2^n$. On a

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2, \qquad \Rightarrow\ R = 1/2.$$

La même formule et un calcul semblable montrent que la seconde est aussi de rayon de convergence $R = 1/2$. On peut alors affirmer que les deux séries convergent pour $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ et qu'elles divergent pour $|x| > \frac{1}{2}$.
Étudions les cas $x = \pm\frac{1}{2}$: Si $x = \frac{1}{2}$, les deux séries deviennent

$$\sum (-1)^n \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

La première diverge grossièrement et la seconde converge par le critère des séries alternées.
Si $x = -\frac{1}{2}$, on obtient les séries

$$\sum 1 \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{2n+1}.$$

On voit facilement que ces deux séries divergent.

Solution de l'exercice 4. On a

$$\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{x=A}^{x=B} = \frac{1}{3A^3}.$$

On a $1/n^4 = f(n)$, avec $f(x) = 1/x^4$ fonction continue, décroissante et positive. Le théorème de comparaison série-intégrale donne alors

$$\int_{11}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx \leq \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$$

Donc,

$$0.0001 < \frac{1}{3003} \leq S - S_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{3000} < 0.001.$$

Mais $\frac{1}{3000} < 0.001$: l'erreur commis lorsqu'on approche S par S_{10} est donc $S - S_{10} < 0.001$. Trois chiffres après la virgule sont alors correctes. D'autre part, comme $S - S_10 \leq \frac{1}{3003} > 0.0001$, le quatrième chiffre après la virgule n'est plus correcte.