

Cursus pharmacie-ingénieurs. UE Ingénieurs 4
Partiel du 17 mars 2016 – Durée : 1h00

Documents autorisés : notes manuscrites, photocopiés, calculatrices.

Exercice 1 Étudier la convergence et la convergence absolue de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + 1},$$

en fonction du paramètre $\alpha \geq 0$

Exercice 2 Soit $r > 1$ et $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n}$.

1. Calculer la somme S en fonction de r .

2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Donner une formule pour la somme $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^n}$ et en déduire la

$$\text{somme } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{r^n}.$$

3. On suppose dans cette question $r = 10$. Comment faut-il choisir N pour que $0 < S - S_N < 0.001$?

Exercice 3 On note \mathbb{N}^* l'ensemble de entiers strictement positifs. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $u_n = \frac{((n+2)!)^2}{(2n-1)!}$.

1. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante pour $n \geq 3$.

4. Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (cette limite $\ell \geq 0$ existe par le théorème sur les suites décroissantes). Déduire de la réponse à la question 2 que $\ell = 0$.

5. Calculer $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}^*\}$.