CORRECTION DU PARTIEL DU 17

$\boxed{\text{exercice 1}}$ $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha+1}$

(•) Si $\alpha=0$: $\sum \frac{(-1)^n}{2}$ diverge parce que le terme général $\frac{(-1)^n}{2}$ tend pas vers 0.

(•) Si $\alpha>0$, $\frac{1}{n^\alpha+1}$ est une suite décroissante de limite nulle, et $\frac{1}{n^\alpha+1}\geq 0$. Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha+1}$ converge par le théorème des séries alternées.

Pour la convergence absolue, observons que $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha+1}\right| = \sum \frac{1}{n^\alpha+1}$

et $\frac{1}{n^\alpha+1}\geq 0$, $\frac{1}{n^\alpha+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$

Par le critère de Riemann, la série est absolument convergente si et seulement si $\alpha>1$

$\boxed{\text{exercice 3}}$ $\quad u_n = \frac{((n+2)!)^2}{(2n-1)!}$

1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+3)!)^2 \, (2n-1)!}{(2n+1)! \, ((n+2)!)^2} = \frac{(n+3)^2}{(2n+1)2n}$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+\frac{3}{n})^2}{4\cancel{n^2}(1+\frac{1}{2n})} = \frac{1}{4}$

3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+3)^2}{(2n+1)2n} \leq 1$ ssi $n^2+6n+9 \leq 4n^2+2n$

ssi $3n^2-4n-9\geq 0$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$)

ssi $n \geq \frac{2+\sqrt{31}}{3}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$), ssi $n\geq 3$

donc $u_{n+1}\leq u_n$ pour $n\geq 3$.

4) Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n \geq 0$. Si $\ell > 0$ on a:

On a $\frac{1}{4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ell}{\ell}$, c'à'd $\ell = \frac{1}{4}\ell$: c'est absurde.

donc $\ell = 0$.

5) $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}^*\} = u_3 = \frac{(5!)^2}{5!} = 5! = 120$

$\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}^*\} = 0$, en effet $u_n \geq 0$ pour tout n et

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

exercice 2 $\quad r > 1$

1) $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{r}}$

2) $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{r^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{r}}$. Donc $R_N = S - S_N = \frac{1}{1-\frac{1}{r}} - \frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{r}}$

et alors $R_N = \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{1}{(r-1)r^N}$

3) On veut $0 < R_N = S - S_N < 0{,}001$

Mais $r = 10$ et $R_N = \frac{1}{9 \cdot 10^N} < 0{,}001 = \frac{1}{1000}$

si et seulement si $1000 < 9 \cdot 10^N$, c'est à dire $N \geq 3$.