Corrigé de l'examen d'analyse du 22 mai 2014

exercice 1

1) Les séries $\sum_{n\geq 4} \frac{n-1}{n}$ et $\sum_{n \geq 4} \frac{n}{n+1}$ sont divergentes, en effet les termes généraux ne convergent pas vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

2)
$$\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)-n^2}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

et $\sum -\frac{1}{n^2}$ converge par le critère de Riemann. Donc $\sum\left(\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1}\right)$ converge.

De plus :
$$\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=4}^{N}\left(\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=4}^{N}(b_n - b_{n+1})$$

(avec $b_n = \frac{n-1}{n}$)
$$= \lim_{N\to+\infty}\left(b_4 - b_{N+1}\right) = b_4 - \left(\lim_{N\to+\infty} \frac{N}{N+1}\right) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

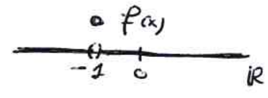
exercice 2

1) $f_n(x) = e^{-n(x+1)^2}$; $f_n(-1) = e^{-n\cdot 0} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

donc $f_n(-1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Si $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$ alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Posons alors $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq -1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

et la suite (f_n) converge simplement vers f dans $\mathbb{R}$.



2) La convergence $f_n \to f$ n'est pas uniforme dans $\mathbb{R}$. En effet, une limite uniforme de fonctions continues serait continue. Or, la fonction f est discontinue en -1.

Montrons cependant que $f_n \to f$ uniformément dans $\mathbb{R}^+$.

En effet, $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |e^{-n(x+1)^2} - 0|$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} e^{-n(x+1)^2} = e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

la fonction $x\mapsto e^{-n(x+1)^2}$ est décroissante dans $\mathbb{R}^+$ et atteint son maximum en 0.

3)

Pour $x=-1$, $\sum f_n(-1) = \sum 1$ diverge.

Pour $x\neq -1$, $\sum f_n(x) = \sum e^{-n(x+1)^2} = \sum \left(\frac{1}{e^{(x+1)^2}}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{e^{(x+1)^2}}$ comprise entre 0 et 1.

Cette série converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{e^{(x+1)^2}}}.$$

---

exercice 3

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, est une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

Si $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon de c.v. R,

alors $\forall x\in]-R,R[$, $f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

Donc :

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)a_n x^n.$$

Imposons à cette expression d'être égale à $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

On trouve alors $(n^2+1)a_n = \frac{1}{n!}$ et donc $a_n = \frac{1}{(n^2+1)\cdot n!}$

On trouve ainsi $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)n!} x^n$.

Calculons le rayon de convergence R de cette série entière à l'aide de la formule

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{(n^2+1)n!}{[(n+1)^2+1](n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{[(n+1)^2+1]\cdot(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})\cdot(n+1)}$$

$$=0$$

Donc $R = +\infty$.

$\boxed{\text{EXERCICE 4}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n), \quad \text{où } f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Observons que f est une fonction positive, décroissante vers 0 pour $x \to +\infty$.

On sait alors que $\sum \frac{1}{1+n^2}$ est de même nature que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$, qui est convergente.

En effet

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to+\infty} [\arctan x]_1^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\arctan(A) - \arctan(1)\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

On sait aussi que

$$\frac{\pi}{4} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\frac{\pi}{4} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \le \frac{\pi}{2}}$$