

**Traiter seulement 3 exercices parmi les suivants**

**Exercice 1 (6 points).** Tracer le graphe de la fonction  $f(x) = xe^{-3x/10}$ , pour  $x \geq 0$ . Calculer ensuite le sup des ensembles suivants<sup>1</sup> :

$$A = \{xe^{-3x/10} : x \geq 0\}, \quad B = \{ne^{-3n/10} : n \in \mathbb{N}\}.$$

**Exercice 2 (6 points).** Soit  $i$  l'unité imaginaire. La série  $\sum i^n$  est-elle convergente ? Calculer

$$1 + i + i^2 + \dots + i^{100}.$$

**Exercice 3 (6 points).** Les séries suivantes sont-elles convergentes ? Justifier votre réponse.

$$\sum \frac{n!}{(2n)!}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{1 + \ln(n)}.$$

**Exercice 4 (8 points).**

Le but de cet exercice est d'effectuer un calcul approché de la somme de la série

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

1. Pour quels entiers naturels l'inégalité

$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

est-elle vraie ?

2. La série  $\sum \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$  est-elle convergente ?

3. Calculer la somme de la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

4. Démontrer que

$$\frac{9}{8} \leq S \leq \frac{10}{8}.$$

---

<sup>1</sup>Pour ceux qui n'ont pas de calculatrice :  $\frac{3}{4}e^{3/10} \simeq 1.0123$