Cursus pharmacie-ingénieurs
Partiel du 20 mars 2014 – Durée : 1h00
Documents autorisés : notes manuscrites, polycopiés, calculatrices.

Exercice 1 Étudier la fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ pour $x \geq 0$. Calculer ensuite

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \qquad \text{et} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(1+n)}{1+n}.$$

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Vrai ou faux ?

i) Si $\sum u_n^2$ converge alors $\sum u_n$ converge.

ii) Si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ converge.

On donnera une démonstration ou un contrexemple.

Exercice 3

1. Démontrer que les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ sont convergentes.
2. Calculer la somme $S = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
   (*Indication :* on pourra observer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).
3. Calculer la somme $S' = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$
4. En déduire que

$$\frac{19}{12} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{21}{12}.$$