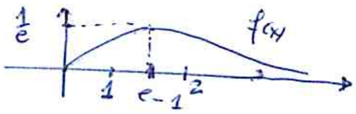
Corrigé du partiel du 20 mars 2014

exercice 1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, $x \geq 0$

On a $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$; $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\,1+x - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ dans $\mathbb{R}^+$ $\iff \ln(1+x) \leq 1 \iff 1+x \leq e \iff x \leq e-1$.



$$f(e-1) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

Donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} f(x) = \dfrac{1}{e} = 0,367\ldots$

Mais $1 < e-1 < 2$, car $e = 2,71\ldots$

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \max\big(f(1), f(2)\big) = \max\left(\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}\right) = \frac{\ln 3}{3} = 0,366\ldots$$

exercice 2 Soit $u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) $\sum u_n^2$ converge $\not\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge :

contrexemple : prendre $u_n = \dfrac{1}{n^{3/4}}$ et appliquer le critère de Riemann, qui affirme que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

ii) $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n^2$ converge [VRAI]

En effet, $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \to 0 \Rightarrow \exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$ $0 \leq u_n \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq u_n^2 \leq u_n$ $\forall n \geq n_0$ et $\sum u_n^2$ converge par le critère de comparaison

exercice 3

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente

$$0 \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge par comparaison.}$$

$$S = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=4}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{4}.$$

somme télescopique

$$S' = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \text{.... même calcul qu'avant...} = \frac{1}{3}.$$

Par comparaison : $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{19}{12} < \frac{58}{36} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{61}{36} < \frac{21}{12}$$