1)

$$\lim_{x \to 0_+} f = \lim_{x \to 0_-} f \quad \text{car } f \text{ est paire.}$$

Les Hp du Thm de de l'Hôpital sont vérifiées donc

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0_+} \cos x = 1$$

On a donc que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2] Pour établir le nombre de zéros de la fc f sur $[-1, 0]$ on regarde $f(-1)$, $f(0)$ et les eventuels points stationnaires de f (c'est-à-dire les zéros de f') sur $[-1, 0]$.

$f(-1) = f(0) = 1$

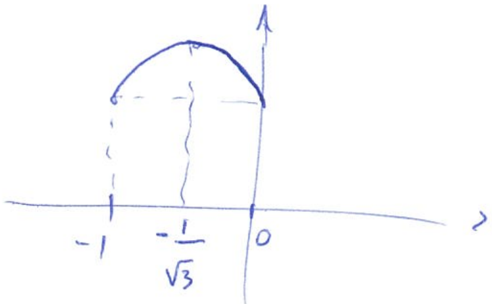
$f' : x \longmapsto 3x^2 - 1$ donc $f' = 0$ pour $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Donc $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ point de max locale

à comparer avec $x = -1$ et $x = 0$.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} + 1 > 1$$

On en conclut qui f n'a aucun zéro dans $[-1, 0]$.



Le point $x_L = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ est un point de Lagrange de f sur $[-1, 0]$ car il vérifie $(0 =)\ f'(x_L) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ (= 0)$

Enfin, $f([-1, 0]) = \left[1, \frac{2}{3\sqrt{3}} + 1\right]$.

3] Pour avoir un encadrement de f on utilise l'IAF sur l'intervalle $[2,5]$ vu comme l'union des deux sous-intervalles $[2,x]$ et $[x,5]$ (avec $x \in]2,5[$).

ici x joue le rôle de b

ici x joue le rôle de a

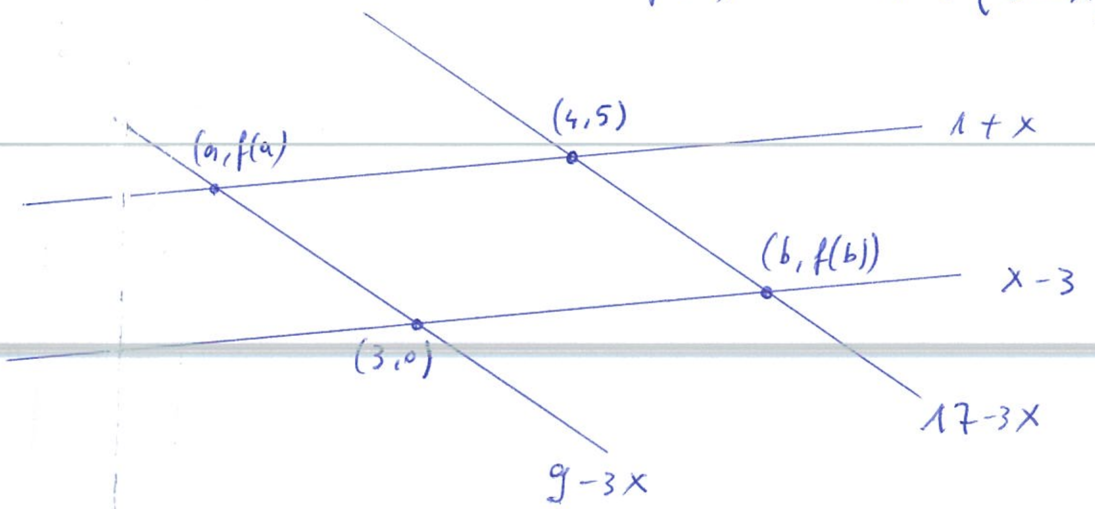
L'IAF s'écrit : $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$ pour une fonction f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $m \leq f' \leq M$ sur $]a,b[$.

Sur $[2,x]$ on a $3-3(x-2) \leq f(x) \leq 3+(x-2)$

Sur $[x,5]$ on a $2-(5-x) \leq f(x) \leq 2+3(5-x)$

$(a,f(a)) = (2,3)$

$(b,f(b)) = (5,2)$



En partant de la figure et des droites calculées on peut déduire que

$f(a) \leq \sup f \leq 5$ sur $[a,4]$

$f(b) \leq \sup f \leq 5$ sur $[4,b]$

$0 \leq \inf f \leq f(a)$ sur $[a,3]$

$0 \leq \inf f \leq f(b)$ sur $[3,b]$

$0 \leq f \leq 5$ sur $[2,5]$

4] On utilise à nouveau l'IAF sur l'intervalle $I = [0, 0.02]$ et avec la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{4-x} + e^x$

On veut encadrer $f(0.02)$ donc $f(b)$ et on utilise $f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a)$ avec $m \leq f' \leq M$.

Ici $f' : x \longmapsto \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}} + e^x > 0$ sur I

alors $\underbrace{1 - \frac{1}{4}}_{f'(0)} \leq f' \leq \underbrace{e - \frac{1}{2\sqrt{3}}}_{f'(1)}$ (on prends large)

donc $\frac{3}{4} \leq f' \leq \underbrace{2.71 - 0.25}_{\sim 2.5}$

On revient à l'IAF :

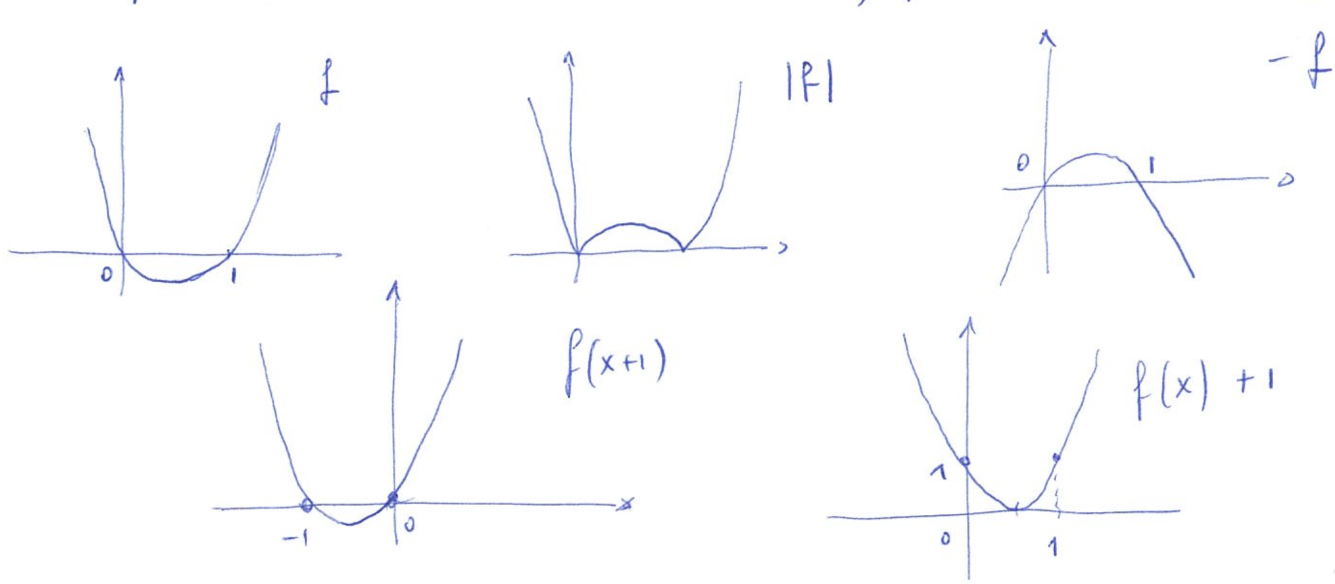
$$3 + \frac{3}{4}\, 0.02 \leq f(0.02) \leq 3 + \frac{5}{2}\, 0.02$$

c'est-à-dire

$$\boxed{3 + 0.015 \leq f(0.02) \leq 3 + 0.05}$$

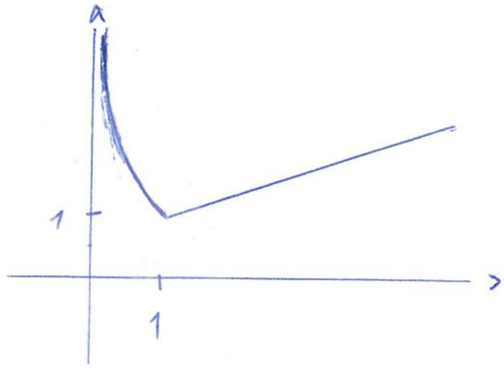
En effet, avec la calculette, $f(0.02) \approx 3.0151951$.

5)



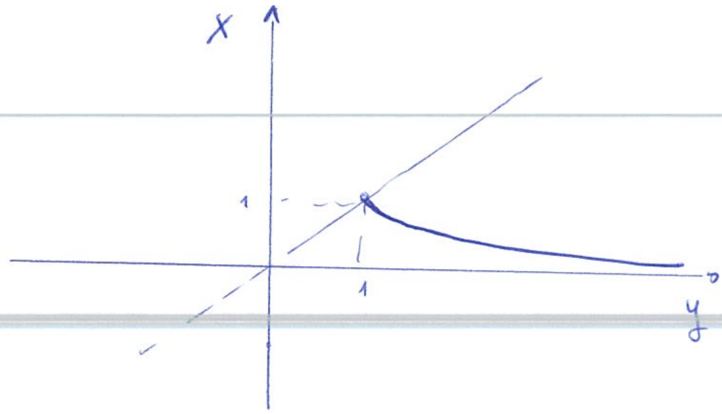
6]

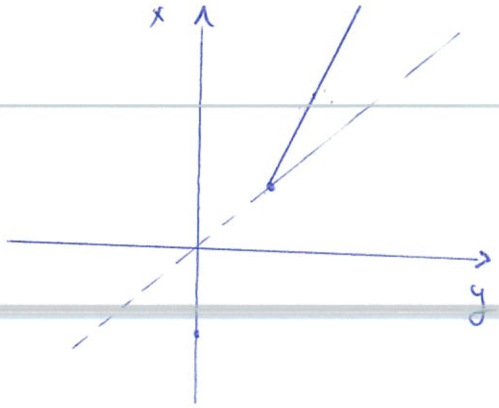
$$f : x \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x} - 1, & 0 < x < 1 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$$



f admet une fonction réciproque sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ car elle n'est pas monotone sur $]0,+\infty[$ mais séparément stricte sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$

Pour tracer le graphique de f^{-1}, on considère le sym de celui du f par rapport à la droite $y = x$





réciproque de f sur $]\overset{x}{0},1]$

réciproque de f sur $[1,\overset{x}{+\infty}[$

Ici c'est un cas très simple où l'on peut calculer exactement l'expression de f^{-1} :

$$f^{-1} : y \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{y+1} & y \in [1,+\infty[\\ 2y-1 & y \in]0,1] \end{cases}$$

Donc $(f^{-1})(\underset{y}{2}) = 3$ en effet $f(3) = 2$

et $(f^{-1})(3) = 5$ en effet $f(5) = 3$.

7) Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue prend toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$.