جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira. Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

Nom :
Prénom :

Corrigé

Solution .1 ***1) La continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$,***

a) La continuité de f sur $\mathbb{R}$

1-a) Sur $]-\infty, 1[$, *la fonction f est continue (produit de deux fonctions continues)* 0,25

2-a) Sur $]1, +\infty[$, *la fonction f est continue (somme et rapport de deux fonctions continues)* 0,25

3-a) La continuité de f en $x = 1$. On a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \cos^2(\pi x) = 1 = f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 = f(1),$$

0,5 0,5

donc f est continue en $x = 1$. D'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

0,25 *1-b) Sur* $]-\infty, 1[$, *la fonction f est dérivable (produit de deux fonctions dérivables)*

0,25 *2-b) Sur* $]1, +\infty[$, *la fonction f est dérivable (somme et rapport de deux fonctions dérivables)*

3-b) La dérivabilité de f en $x = 1$. On a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{-2\pi \cos(\pi x) \sin(\pi x)}{1} = 0$$ 0,5

et

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1 + \frac{\ln x}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\ln x}{x(x-1)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{x(2x-1)} = 1,$$ 0,5

donc f n'est pas dérivable en $x = 1$. D'où f est dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

2) La fonction f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$, car elle n'est pas dérivable en $x = 1$. 1

Solution .2 *1) Montrons que*

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $f(x) = \sqrt{x}$. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[n, n+1]$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\exists c \in]n, n+1[, \ f(n+1) - f(n) = f'(c),$$ 1

ou encore

$$\exists c \in]n, n+1[, . \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

On a

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

donc

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1

2) Montrons que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}}, \ \forall k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\Longrightarrow 2\sqrt{n+1} - 2 < u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1

3) $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$ $\left(\text{car } u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty}(2\sqrt{n+1} - 2) = +\infty\right).$ 1

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est monotone . On a*

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - u_n + 2\sqrt{n} = (u_{n+1} - u_n) - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < 0.$$

1

D'où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante.*

b) Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est minorée. On a*

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2 \Longrightarrow u_n - 2\sqrt{n} > 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 2 > -2 \Longrightarrow v_n > -2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

0,75

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante et minorée donc elle converge.* 0,25

Solution .3

1) Le $Dl_3(o)$ ***de*** g ***où*** $g(x) = e^{1+\sin x} - e.$

On a $e^{1+\sin x} - e = e\left(e^{\sin x} - 1\right)$, *on cherche le* $Dl_3(o)$ *de* $e^{\sin x} - 1$. *On a*

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o\left(y^3\right) \ \text{ et } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right),$$

0,25 0,25

donc

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{x^{3}}{6}\right)+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{6}+o\left(x^{3}\right)=1+x+\frac{x^{2}}{2}+o\left(x^{3}\right)$$

1,5

D'où

$$g\left(x\right)=ex+e\frac{x^{2}}{2}+o\left(x^{3}\right).$$

2) Calcul $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)$.

On a $\tan x=x+o\left(x\right)$ *et* $g\left(x\right)=ex+o\left(x\right)$

$$\lim_{x\to0}f\left(x\right)=\lim_{x\to0}\frac{g\left(x\right)}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{ex+o\left(x\right)}{x+o\left(x\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(e+\frac{o(x)}{x}\right)}{x\left(1+\frac{o(x)}{x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(e+\frac{o(x)}{x}\right)}{\left(1+\frac{o(x)}{x}\right)}=e.$$

2

3) Montrons que h ***est dérivable au point*** $x=0$

$$h\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^{1+\sin x}-e}{\tan x} & si\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[.\\ e & si\ x=0\end{cases}$$

$$h'\left(0\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{1+\sin x}-e}{\tan x}-e}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{1+\sin x}-e-e\tan x}{x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{e\left(e^{\sin x}-1-\tan x\right)}{x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e\left(\frac{x^{2}}{2}+o\left(x^{2}\right)\right)}{x^{2}+o\left(x^{2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^{2}\left(\frac{e}{2}+\frac{o(x^{2})}{x^{2}}\right)}{x^{2}\left(1+\frac{o(x^{2})}{x^{2}}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{e}{2}+\frac{o(x^{2})}{x^{2}}\right)}{\left(1+\frac{o(x^{2})}{x^{2}}\right)}=\frac{e}{2}.$$

2

Solution .4 *Montrons qu'il existe* $\alpha\in[0,+\infty[$ *tel que* $f\left(\alpha\right)=\alpha$.

On a $f\left(x\right)\geq0,\ \forall x\in\mathbb{R}^{+}$, *donc* $f\left(0\right)\geq0$, *on distingue deux cas*

$\boldsymbol{1^{er}}$ ***cas*** *si* $f\left(0\right)=0$, *alors* $\alpha=0$ *convient* 1

$\boldsymbol{2^{ème}}$ ***cas*** *si* $f\left(0\right)>0$, *considérons* $g:x\longmapsto\dfrac{f\left(x\right)}{x}$, *puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires.*

3

a) La fonction g *est définie et continue sur* $]0,+\infty[$.

b) Puisque $f\left(0\right)>0$, *par opérations sur les limites, on a :*

$$\lim_{x\longrightarrow0^{+}}g\left(x\right)=\lim_{x\longrightarrow0^{+}}\frac{f\left(x\right)}{x}=\frac{\lim\limits_{x\longrightarrow0^{+}}f\left(x\right)}{\lim\limits_{x\longrightarrow0^{+}}x}=\frac{f\left(0\right)}{\lim\limits_{x\longrightarrow0^{+}}x}=+\infty.$$

c) De plus on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}g\left(x\right)=l<1$.

D'après le T.V. I, puisque g *est continue et qu'elle prend des valeurs inférieures et supérieures à* 1, *donc il existe* $\alpha\in]0,+\infty[$, *tel que* $g\left(\alpha\right)=1$, *alors* $f\left(\alpha\right)=\alpha$. *D'où il existe* $\alpha\in[0,+\infty[$ *tel que* $f\left(\alpha\right)=\alpha$.