CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Un ballon d'enfant (de masse m) gonflé à l'hélium possède une force ascensionnelle F constante (gravité déduite) et il est exposé à un vent horizontal de vitesse V constant. On le lâche sans vitesse initiale et en notant respectivement $x(t)$ et $y(t)$ l'abscisse et l'ordonnée de sa position à l'instant t, le principe fondamental de la dynamique produit les équations différentielles ci-dessous :

$$\begin{cases} mx'' = k\,(V - x') & (E_1) \\ my'' = F & (E_2) \\ x(0) = x'(0) = 0, & \\ y(0) = y'(0) = 0 & \end{cases}$$

k étant une constante positive.

1. Donner un sens à chacune de ces équations.
2. Déterminer les fonctions x et y donnant la position du ballon à chaque instant.
3. Quel type de trajectoire adopte le ballon après un temps très long ?
4. Donner une limite au modèle.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(E)\ :\ \sin(t)y' - \cos(t)y = \sin(2t)$$

1. À quelle classe appartient l'équation différentielle (E) ?
2. Déterminer les valeurs interdite de (E) et donner les intervalles de résolution I_k pour $k \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que les solutions de l'équation homogène associée à (H) sur I_k sont les fonctions de la forme
$$y_h\ :\ t \longmapsto \lambda_k.\sin(t), \qquad \lambda_k \in \mathbb{R}$$
4. À l'aide de la méthode de variation de la constante, montrer que la fonction
$$y_p\ :\ t \longmapsto \ln\left(\sin^2(t)\right)\sin(t)$$
est une solution de (E) sur chaque intervalle I_k.

5. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur I_k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
6. Montrer que toutes les solutions définies sur $I_{-1} =]-\pi, 0[$ et $I_0 =]0, \pi[$ se prolongent en 0.
7. En étudiant la dérivabilité de fonctions prolongées à la question précédente, montrer que (E) n'admet aucune solution traversant la valeur interdite 0.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 En chimie, l'étude de la vitesse de réaction de certaines réactions chimiques produit des équations différentielles de la forme

$$(E)\ :\ y' = (1 - Ay)(1 + By)$$

la fonction y représentant une concentration, A et B étant des constantes positives caractéristiques de la réaction étudiée.

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?
2. *Étude qualitative*
   (a) Déterminer les solutions constantes de (E) et leurs natures.
   (b) Tracer l'allure de quelques solutions de (E).
3. *Résolution exacte*
   (a) Déterminer deux constantes α et β (dépendant de A et B) telles que
   $$\forall X \notin \left\{\frac{1}{A}, -\frac{1}{B}\right\}, \qquad \frac{1}{(1-AX)(1+BX)} = \frac{\alpha}{1-AX} + \frac{\beta}{1+BX}$$
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. On donnera en particulier l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$ (pour $y_0 \in \mathbb{R}$ quelconque).
   (c) Comparer le comportement des solutions obtenues à la question précédente avec les informations issues de l'étude qualitative.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Ces équations sont issues du principe fondamental de la dynamique : $\sum \overrightarrow{F} = m.\overrightarrow{a}$. En projetant cette égalité vectorielle sur l'axe des ordonnées, on ne trouve que la force ascendante (constante), d'où la seconde équation portant sur y. En projetant sur l'axe des abscisses, on retrouve, dans la première équation, le fait que la force du vent est proportionnelle à la différence entre la vitesse du vent V et la vitesse du ballon (x').
2. Il s'agit ici de deux équations différentielles linéaires, d'ordre deux, à coefficients constants, avec des seconds membres constants.

   Ainsi, la première équation s'écrit

   $$(E_1)\ :\ mx'' = k(V - x') \iff x'' + \frac{k}{m}x' = \frac{kV}{m}$$

   Le polynôme caractéristique de cette équation est $P_1(X) = X^2 + \frac{k}{m}X = X\left(X + \frac{k}{m}\right)$. Les racines de ce polynôme étant $X = 0$ et $X = -\frac{k}{m}$, les solutions de l'équation homogène associée à (E_1) sont

   $$x_h\ :\ t \longmapsto \lambda + \mu e^{-\frac{k}{m}t}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

   Par ailleurs, le second membre de l'équation (E_1) est constant. Cependant, si l'on injecte une solution constante $y_p(t) = k$ dans cette équation, on obtient l'égalité $0 = \frac{kV}{m}$. Autrement dit, (E_1) n'admet pas de solution constante. On cherche alors une solution particulière de (E_1) sous la forme $y_p(t) = at$. On a alors $y_p'(t) = a$ et $y_p''(t) = 0$. En injectant ces formes dans l'équation (E_1), on obtient

   $$0 + \frac{k}{m}a = \frac{kV}{m} \iff a = V$$

   La fonction $y_p\ :\ t \mapsto Vt$ est donc une solution de (E_1) et les solutions de (E_1) sont

   $$y\ :\ t \longmapsto \lambda + \mu e^{-\frac{k}{m}t} + Vt$$

   Parmi toutes ces solutions, l'unique fonction vérifiant en outre les conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$ est associée aux valeurs de λ et μ vérifiant le système

   $$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ -\frac{k}{m}\mu + V & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & -\mu = -\frac{Vm}{k} \\ \mu & = & \frac{Vm}{k} \end{array}\right.$$

   la seconde équation étant obtenue en posant $t = 0$ dans l'expression $y'(t) = -\frac{k}{m}\mu e^{-\frac{k}{m}t} + V$. Ainsi, l'abscisse du ballon à chaque instant est donnée par

   $$x(t) = \frac{Vm}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) + Vt$$

   L'équation (E_2) est du même type que l'équation (E_1). Cependant, puisqu'elle ne fait intervenir que la dérivée seconde y'', elle s'intègre “à vue” et l'on obtient :

   $$y''(t) = F \iff y'(t) = Ft + \lambda \iff y(t) = \frac{1}{2}Ft^2 + \lambda t + \mu$$

   D'autre part, les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ imposent également $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, l'ordonnée de la position du ballon est donnée par la fonction

   $$y\ :\ t \longmapsto \frac{1}{2}Ft^2$$

3. Au bout d'un temps long, le terme $\frac{Vm}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)$ devient négligeable dans l'expression de $x(t)$. Le comportement de cette fonction est alors proportionnel à t. L'ordonnée étant quant à elle proportionnelle à t^2, il est possible d'établir une relation de la forme $y = Ax^2$. Autrement dit, le ballon adopte, au bout d'un temps long, une trajectoire parabolique.
4. La principale limite au modèle choisi est le fait de supposer la force ascensionnelle F constante. En effet, si l'altitude change beaucoup, la pression atmosphérique change également et le force F doit diminuer.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients variables et non homogène.
2. Les valeurs interdites sont ici les valeurs de t pour lesquelles le coefficient $\sin(t)$ de y' est nul, soit tous les réels $t_k = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Les intervalles de résolution de (E) sont donc les intervalles
$$I_k =]k\pi, (k+1)\pi[, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. L'équation homogène associée à (E) est
$$(H)\ :\ \sin(t)y' + \cos(t)y = 0$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\sin(t)y' - \cos(t)y = 0 &\iff \frac{y'}{y} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\\ &\iff \ln|y_h(t)| = \ln|\sin(t)| + C\\ &\iff y_h(t) = \lambda_k.|\sin(t)|\end{aligned}$$
Par ailleurs, sur l'intervalle I_k, la fonction sinus est de signe constant. Ainsi, quitte à remplacer λ_k par $-\lambda_k$, les solutions de (H) sur I_k sont
$$y_h\ :\ t \longmapsto \lambda_k.\sin(t), \qquad \lambda_k \in \mathbb{R}$$
4. La méthode de variation de la constante incite à rechercher, sur I_k, une solution y_p de l'équation (E) sous la forme
$$y_p(t) = \lambda_k(t).\sin(t)$$
Mais alors $y_p'(t) = \lambda_k'(t).\sin(t) + \lambda_k(t).\cos(t)$ et y_p est une solution de (E) si et seulement si
$$\begin{aligned}&\sin(t)y_p'(t) - \cos(t)y_p(t) = \sin(2t)\\ \iff &\sin(t)\left(\lambda_k'(t).\sin(t) + \cancel{\lambda_k(t).\cos(t)}\right) - \cancel{\cos(t).\lambda_k(t).\sin(t)} = \sin(2t)\\ \iff &\lambda_k'(t) = \frac{\sin(2t)}{\sin^2(t)} = \frac{2\cancel{\sin(t)}\cos(t)}{\sin^{\cancel{2}}(t)} = 2\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\end{aligned}$$
En posant $\lambda_k(t) = 2\ln|\sin(t)| = \ln\left(\sin^2(t)\right)$, on obtient bien
$$y_p(t) = \ln\left(\sin^2(t)\right).\sin(t)$$

5. D'après les calculs précédent, les solutions de (E) sur I_k sont donc toutes les fonctions de la forme

$$y\,:\,t\longmapsto \lambda_k.\sin(t)+\ln\left(\sin^2(t)\right).\sin(t),\qquad \lambda_k\in\mathbb{R}$$

quelque soit $k\in\mathbb{Z}$.

6. Notons y_0 la solution générique de (E) sur l'intervalle $I_0=]0,\pi[$:

$$\forall t\in]0,\pi[,\quad y_0(t)=\lambda_0.\sin(t)+\ln\left(\sin^2(t)\right).\sin(t),\quad \lambda_0\in\mathbb{R}$$

Par croissance comparée, on a

$$\lim_{t\to 0^+}\ln\left(\sin^2(t)\right).\sin(t)=0$$

et

$$\lim_{t\to 0^+}y_0(t)=0$$

quelque soit $\lambda_0\in\mathbb{R}$.
On montre de même que toutes les solutions de (E) sur $I_{-1}=]-\pi,0[$ tendent vers 0 quand $t\to 0^-$.
On peut ainsi prolonger ces solutions en 0 en posant

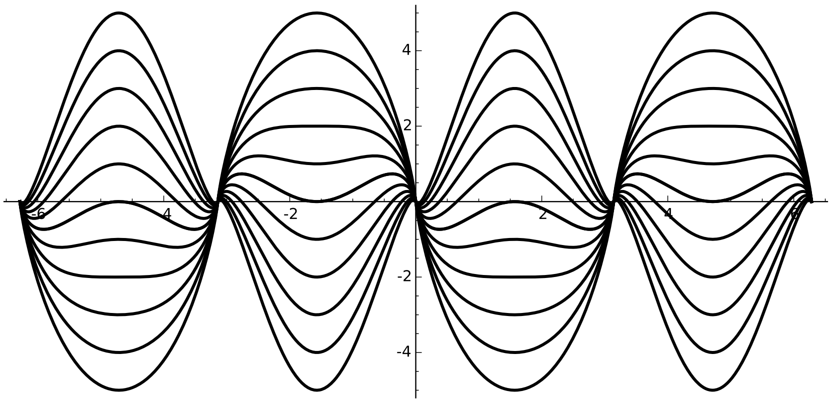
$$y_0(0)=y_{-1}(0)=0.$$

7. Pour étudier la dérivabilité des solutions prolongées y_0 et y_{-1}, on étudie la limite des taux d'accroissements associés. Or

$$\begin{aligned}T_0(t)=\frac{y_0(t)-y_0(0)}{t}&=\frac{\lambda_0.\sin(t)+\ln\left(\sin^2(t)\right).\sin(t)}{t}\\&=\lambda_0.\frac{\sin(t)}{t}+\ln\left(\sin^2(t)\right).\frac{\sin(t)}{t}\end{aligned}$$

Or par équivalence, on a $\frac{\sin(t)}{t}\to 1$. Donc $T_0(t)\to-\infty$ quand $t\to 0^+$. Ainsi, aucune solution de (E) sur I_0 ne se prolonge en une solution dérivable en 0. L'équation (E) n'admet donc aucune solution définie en 0.

Graphiquement, on obtient les familles de courbes ci-dessous :



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire et autonome.

2. (a) L'équation (E) est de la forme $y' = F(y)$ avec $F(y) = (1-Ay)(1+By)$. Les solutions constantes de (E) sont données par les racines de F. Or

$$F(y) = 0 \Longleftrightarrow (1-Ay)(1+By) = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{A} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{1}{B}$$

Les solutions constantes de (E) sont donc

$$c_1 \,:\, t \longmapsto \frac{1}{A} \qquad \text{et} \qquad c_2 \,:\, t \longmapsto -\frac{1}{B}$$

Par ailleurs, la nature de ces points fixes est donnée par le signe de la dérivée F' en chacun de ces points. Or

$$F'(y) = -A(1+By) + B(1-Ay)$$

Donc

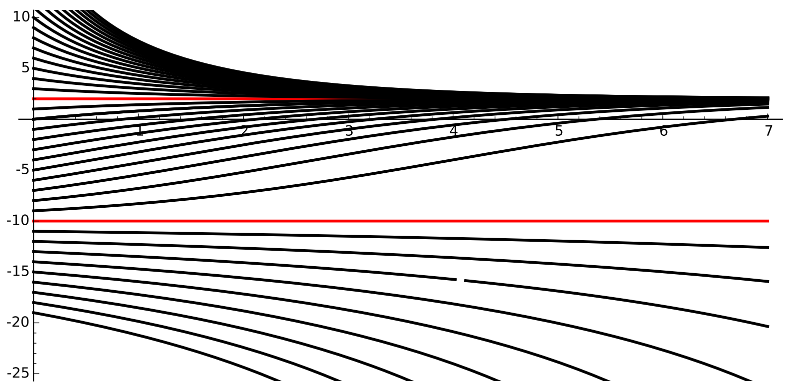
$$F'\left(\frac{1}{A}\right) = -A\left(1+\frac{B}{A}\right) = -A-B < 0$$

et

$$F'\left(-\frac{1}{B}\right) = B\left(1-\frac{B}{-A}\right) = A+B > 0$$

c_1 est donc un point fixe stable et c_2 est un point fixe instable.

On obtient le graphe si dessous :



3. (a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall X \notin \left\{\frac{1}{A},\ -\frac{1}{B}\right\}$, on ait

$$\frac{1}{(1-AX)(1+BX)} = \frac{\alpha}{1-AX} + \frac{\beta}{1+BX} \qquad (\star)$$

En multipliant l'égalité ci-dessus par $(1-AX)$, on a

$$\frac{1}{1+BX} = \alpha + \beta\frac{1-AX}{1+BX}$$

En posant $X = \frac{1}{A}$, on a alors

$$\alpha = \frac{1}{1+\frac{B}{A}} = \frac{A}{A+B}$$

De même, on multipliant l'égalité ($\star$) par $(1+BX)$, on a

$$\frac{1}{1-AX} = \alpha\frac{1+BX}{1-AX} + \beta$$

En posant alors $X = -\frac{1}{B}$, on obtient

$$\beta = \frac{1}{1+\frac{A}{B}} = \frac{B}{A+B}$$

et

$$\forall X \notin \left\{\frac{1}{A},\ -\frac{1}{B}\right\}, \qquad \frac{1}{(1-AX)(1+BX)} = \frac{1}{A+B}\left(\frac{A}{1-AX} + \frac{B}{1+BX}\right)$$

(b)

$$\begin{aligned}
(E) \Leftrightarrow\ & \frac{y'}{(1-Ay)(1+By)} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{Ay'}{1-Ay} + \frac{By'}{1+By} = A+B \\
\Leftrightarrow\ & -\ln|1-Ay(t)| + \ln|1+By(t)| = (A+B)t + C \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1+By(t)}{1-Ay(t)} = \lambda e^{(A+B)t} \\
\Leftrightarrow\ & 1+By(t) = \lambda e^{(A+B)t}(1-Ay(t)) \\
\Leftrightarrow\ & (B+\lambda A e^{(A+B)t})y(t) = \lambda e^{(A+B)t} - 1 \\
\Leftrightarrow\ & y(t) = \frac{\lambda e^{(A+B)t}-1}{B+\lambda A e^{(A+B)t}} = \frac{\lambda e^{At} - e^{-Bt}}{Be^{-Bt} + \lambda A e^{At}} \quad (\star\star)
\end{aligned}$$

Parmi toutes ces solutions, la solution vérifiant en outre la condition initiale $y(0) = y_0$ correspond à l'unique valeur de λ vérifiant

$$\frac{\lambda - 1}{B+\lambda A} = y_0 \Leftrightarrow (\lambda-1) = y_0(B+\lambda A) \Leftrightarrow \lambda = \frac{y_0 B + 1}{1-y_0 A} \quad (\star\star\star)$$

Ainsi, l'unique solution cherchée est la solution définie par

$$y(t) = \frac{\frac{y_0B+1}{1-y_0A}e^{At} - e^{-Bt}}{Be^{-Bt} + \frac{y_0B+1}{1-y_0A}Ae^{At}} = \frac{(y_0B+1)e^{At} + (y_0A-1)e^{-Bt}}{(1-y_0A)Be^{-Bt} + (y_0B+1)Ae^{At}}$$

(c) D'après la formule ($\star\star$), on voit que si $\lambda \geqslant 0$, alors le dénominateur de $y(t)$ ne s'annule jamais. y est donc définie sur $\mathbb{R}$ et l'on a $y(t) \to \frac{1}{A}$ quand $t \to +\infty$. Réciproquement, si $\lambda < 0$, alors le dénominateur de $y(t)$ s'annule pour $t = \frac{1}{A+B}\ln\left(-\frac{B}{\lambda A}\right)$. Dans ce cas, les solutions de (E) associées à ces valeurs de λ "explosent" en un temps fini.

Or d'après la formule ($\star\star\star$), on voit que le signe de λ dépend directement de la position de y_0 par rapport à $\frac{1}{A}$ et $-\frac{1}{B}$. Précisément,

- si $-\frac{1}{B} < y_0 < \frac{1}{A}$, alors $\lambda > 0$ et les solutions de (E) associées à ces conditions initiales sont bornées (entre $-\frac{1}{B}$ et $\frac{1}{A}$),
- si $y_0 > \frac{1}{A}$, alors les solutions de (E) associées "explosent" pour un $t < 0$. En ne considérant que les $t > 0$, on retrouve le comportement issu de l'étude qualitative : ces solutions décroissent vers le point fixe stable $\frac{1}{A}$,
- si $y_0 < -\frac{1}{B}$, les solutions associées à (E) explosent en un temps fini (strictement positif).

⋆ ⋆
⋆