CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit

$$(E)\ :\ (t^3-t)y' + (1-3t^2)y = 2t(t^3-t)$$

1. Donner le type de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer les quatre intervalles de résolution de (E).
3. *Résolution de l'équation homogène*
   (a) Montrer que pour tout $t \notin \{-1, 0, 1\}$, on a
   $$\frac{3t^2-1}{t^3-t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}$$
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation
   $$(H)\ :\ (t^3-t)y' + (1-3t^2)y = 0$$
   sur chacun des intervalles de résolution de (E).
4. *Recherche d'une solution particulière*
   (a) Montrer que si (E) admet une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda(t).(t^3-t)$, alors
   $$\lambda'(t) = \frac{2}{t^2-1}$$
   (b) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $t \notin \{-1, 0, 1\}$, on ait
   $$\frac{2}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$$
   (c) En déduire une solution particulière de (E) puis l'ensemble des solutions de (E).
5. *Étude de prolongement*
   (a) Déterminer l'unique solution Y de (E) vérifiant $Y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. On précisera l'intervalle sur lequel cette solution est définie.
   (b) Montrer que Y se prolonge de façon unique en une solution dérivable sur $]-1, 1[$.
   (c) *Facultatif.* La solution Y se prolonge-t-elle au delà de l'intervalle $]-1, 1[$?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(E)\ :\ t^2y'' + 4ty' + (2-t^2)y = 1$$

d'inconnue y.

1. Donner le type de l'équation différentielle (E).
2. On pose $z(t) = t^2y(t)$.
   (a) Calculer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de t, $y'(t)$ et $y''(t)$.
   (b) Montrer que si y est une solution de (E), alors z est une solution de
   $$(\tilde{E})\ :\ z'' - z = 1$$
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\tilde{E})$
3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On considère l'équation

$$(E)\ :\ v' = -g - kv|v|, \quad v(0) = v_0.$$

d'inconnue v, les paramètres g et k étant des constantes positives.

1. Déterminer une fonction F telle que $(E) \Leftrightarrow v' = F(v)$.
2. Montrer que (E) admet un unique point fixe et qu'il est stable (on pourra distinguer les cas $v \geqslant 0$ et $v \leqslant 0$).
3. Tracer, dans un repère (tOv) l'allure de quelques solutions. On prendre un exemple dans chacun des cas ci-dessous :
   $$v_0 > 0, \quad v_0 = 0, \quad -\sqrt{\frac{g}{k}} < v_0 < 0, \quad v_0 < -\sqrt{\frac{g}{k}}.$$
4. Quelle expérience physique est modélisée par cette équation ? (on donnera en particulier un sens à chacun des termes de l'équation).
5. Interpréter les différents résultats tirés de l'étude qualitative de (E).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants et non homogène.
2. Les intervalles de résolution sont donnés par les valeurs interdites qui sont, ici, les valeurs de t pour lesquelles le coefficient $t^3 - t = t(t-1)(t+1)$ s'annule. Ces valeurs interdites sont donc $t = -1$, $t = 0$ et $t = 1$. Les intervalles de résolution sont donc

$$I_1 =]-\infty, -1[, \quad I_2 =]-1, 0[, \quad I_3 =]0, 1[, \quad I_4 =]1, +\infty[$$

3. (a) En réduisant le membre de droite de l'égalité au même dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} &= \frac{(t-1)(t+1) + t(t+1) + t(t-1)}{t^3 - t} \\ &= \frac{(t^2-1) + (t^2+t) + (t^2-t)}{t^2 - t} \\ &= \frac{3t^2 - 1}{t^3 - t} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (H) &\iff \frac{y'}{y} = \frac{3t^2-1}{t^3-t} \\ &\iff \frac{y'}{y} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \\ &\iff \ln|y(t)| = \ln|t| + \ln|t-1| + \ln|t+1| + k = \ln|t(t-1)(t+1)| + k \\ &\iff y(t) = \lambda.|t(t-1)(t+1)| = \lambda.|t^3 - t|, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, quitte à changer λ en $-\lambda$, les solutions de (H) sur l'intervalle sur chacun des intervalles sont de la forme

$$y_h \,:\, t \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1.(t^3 - t) & \text{sur } I_1 \\ \lambda_2.(t^3 - t) & \text{sur } I_2 \\ \lambda_3.(t^3 - t) & \text{sur } I_3 \\ \lambda_4.(t^3 - t) & \text{sur } I_4 \end{array} \right. , \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

4. (a) En posant $y_p(t) = \lambda(t).(t^3 - t)$, on a

$$y_p'(t) = \lambda'(t).(t^3 - t) + \lambda(t).(3t^2 - 1)$$

et

$$(t^3 - t)y_p'(t) + (1 - 3t^2)y_p(t) = \lambda'(t).(t^3 - 1)^2$$

Ainsi, y_p est une solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(t).(t^3 - 1)^2 = 2t(t^3 - t) \iff \lambda'(t) = \frac{2}{t^2 - 1}$$

(b) On cherche a et b tels que

$$\frac{a(t+1)+b(t-1)}{t^2-1} = \frac{2}{t^2-1}$$

On doit donc avoir $(a+b)t+a-b=2$. Par identification, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0 \\ a-b &=& 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& -1 \end{array}\right.$$

et

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

(c) D'après le calcul précédent, on a

$$\lambda'(t) = \frac{2}{t^2-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(t) = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + k$$

Ainsi,

- Sur I_1 et I_4, $\left[t \mapsto (t^3-t)\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]$ est une solution particulière de (E) et l'ensemble des solutions de (E) est alors

$$y_j \,:\, t \longmapsto (t^3-t)\left(\lambda_j + \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right), \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

- Sur I_2 et I_3, $\left[t \mapsto (t^3-t)\ln\left(\frac{1-t}{t+1}\right)\right]$ est une solution particulière de (E) et l'ensemble des solutions de (E) est alors

$$y_j \,:\, t \longmapsto (t^3-t)\left(\lambda_j + \ln\left(\frac{1-t}{t+1}\right)\right), \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

5. (a) La solution Y cherchée est définie sur l'intervalle contenant la valeur initiale $t_0 = \frac{1}{2}$, soit l'intervalle $I_3 =]0,1[$.
La valeur de λ_3 définissant cette unique solution Y est donnée par l'équation

$$\begin{aligned} Y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 &\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda_3 + \ln\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}\right)\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda_3 = \ln 3 \end{aligned}$$

D'où

$$Y \,:\, t \longmapsto (t^3-t).\ln\left(\frac{3-3t}{t+1}\right)$$

(b) Pour que Y soit prolongeable en 0, il faut
- qu'elle admette une limite finie quand $t \to 0^+$,
- qu'il existe une fonction définie sur $]-1,0[$ ayant la même limite quand $t \to 0^-$,
- que les deux fonctions soient dérivables en 0 et que leurs dérivées en 0 soient égales.

Or

$$\lim_{t\to 0^+} Y(t) = 0$$

et pour tout $\lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to 0^-} (t^3 - t)\left(\lambda_2 + \ln\left(\frac{1-t}{t+1}\right)\right) = 0$$

Les deux premiers points sont donc vérifiés. Par ailleurs,

$$\frac{Y(t) - Y(0)}{t} = (t^2 - 1). \ln\left(\frac{3-3t}{t+1}\right) \longrightarrow_{t\to 0^+} -\ln 3$$

et

$$\frac{y_2(t) - y_2(0)}{t} = (t^2 - 1)\left(\lambda_2 + \ln\left(\frac{1-t}{t+1}\right)\right) \longrightarrow_{t\to 0^-} -\lambda_2$$

Ainsi, l'unique solution de (E) sur I_2 offrant un prolongement à Y sur $]-1, 0[$ est la solution y_2 vérifiant $\lambda_2 = -\ln 3$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants et non homogène.
2. (a) Si $z(t) = t^2.y(t)$, on a
   - $z'(t) = 2t.y(t) + t^2.y'(t)$
   - $z''(t) = 2y(t) + 4t.y'(t) + t^2.y(t)$

   (b) Soit y une solution de (E). On a

   $$t^2y'' + 4ty' + (2 - t^2)y = 1 \iff (t^2y'' + 4ty' + 2y) - t^2.y = 1 \iff z'' - z = 1$$

   (c) $(\tilde{E})$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, dont le polynôme caractéristique est

   $$P(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$$

   Les solutions de l'équation homogène $(\tilde{H})\,:\, z'' - z = 0$ sont donc les fonctions de la forme

   $$z_h(t) = Ae^t + Be^{-t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

   par ailleurs, le second membre de $(\tilde{E})$ étant une constante, on cherche une solution particulière de $(\tilde{E})$ sous la forme d'une constante. Or si $z_p(t) = k$, on a $z_p''(t) = 0$ et

   $$z_p''(t) - z_p(t) = 1 \iff -k = 1 \iff k = -1$$

   Autrement dit, la fonction constante égale à -1 est une solution particulière de $(\tilde{E})$ est l'ensemble des solutions de $(\tilde{E})$ est

   $$z\,:\, t \longmapsto Ae^t + Be^{-t} - 1, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

3. Puisque $z(t) = t^2 y(t)$, pour tout $t \neq 0$, on a $y(t) = \frac{1}{t^2} z(t)$ et l'ensemble des solutions de (E) est
$$y(t) = \frac{Ae^t + Be^{-t} - 1}{t^2}, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$
Note : $t = 0$ étant une valeur interdite, les solutions ci-dessus sont définie sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

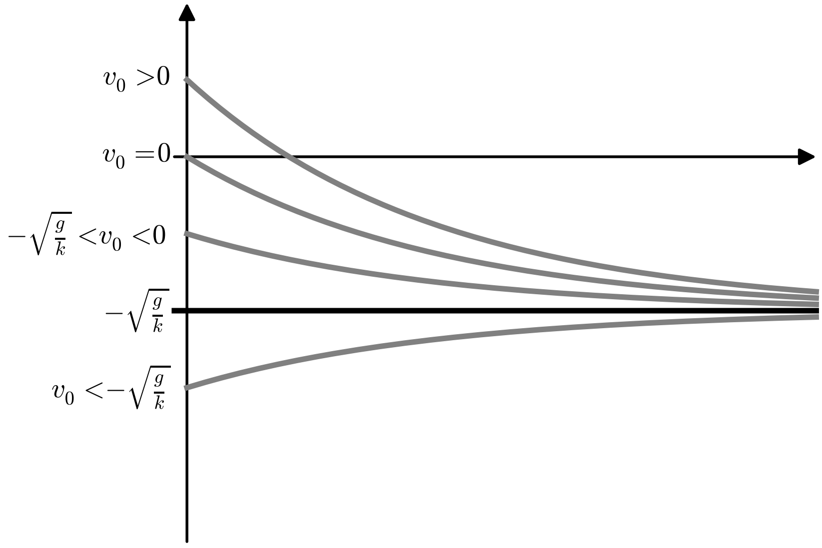
1. La fonction F est $F\ :\ v \mapsto -g - kv|v|$.

2. • Si $v \geqslant 0$, on a $F(v) = -g - kv^2$. Or k et g étant positifs, l'équation $-g - kv^2 = 0$ n'admet pas de solution.
   • Si $v \leqslant 0$, on a $F(v) = -g + kv^2$. Les solutions de l'équation $-g + kv^2 = 0$ sont $v = \pm\sqrt{\frac{g}{k}}$. Parmi ces deux solutions, on ne conserve que la solution négative : $v = -\sqrt{\frac{g}{k}}$.

   La fonction F admet donc une unique racine, et l'équation (E) admet un unique point fixe : $-\sqrt{\frac{g}{k}}$.
3. Au voisinage de $-\sqrt{\frac{g}{k}}$, on a $F(v) = -g + kv^2$ et $F'(v) = 2kv$. Donc
$$F'\left(-\sqrt{\frac{g}{k}}\right) = -2\sqrt{gk} < 0$$
   Le point fixe est donc stable.

4. Il s'agit d'une modélisation de la chute libre dans un champs gravitationnel constant g et dans une atmosphère opposant une force de frottement au mouvement. L'inconnue v est la vitesse de l'objet en chute, la constante $-g$ est la constante gravitationnelle correspondant à la planète sur laquelle a lieu l'expérience, et le terme $-kv|v|$ correspond à la force de frottement, proportionnelle à v^2, toujours opposée au mouvement.

5.



6. Les résultats ci-dessus correspondent aux différents essais suivants :

   - $v_0 > 0$: à $t = 0$, l'objet est lancé vers le haut (il a une vitesse positive). Il commence donc par ralentir, puis il s'arrête et repart dans l'autre sens. Il accélère alors, sans jamais dépasser la vitesse limite $v = -\sqrt{\frac{g}{k}}$.

   - $v_0 =$: à $t = 0$, l'objet est lâché sans vitesse initiale. Il se met à accélérer, toujours sans dépasser la vitesse limite.

   - $-\sqrt{\frac{g}{k}} < v_0 < 0$: à $t = 0$, l'objet est lancé vers le bas, à une vitesse inférieure à la vitesse limite. Il accélère donc jusqu'à cette vitesse limite.

   - $v_0 < -\sqrt{\frac{g}{k}}$: à $t = 0$, l'objet est lancé vers le bas à une vitesse supérieure à la vitesse limite. Dans ce cas, il ralenti jusqu'à atteindre la vitesse limite.

⋆ ⋆
⋆