

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات  
دورة: جوان 2011

وزارة التربية الوطنية  
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي  
الشعبة: رياضيات

المدة: 4 ساعات ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \bar{u}, \bar{v})$ .

$z_C = \sqrt{3}(1+i)$  ،  $z_B = -1+i$  ،  $z_A = 1-i$  ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

1/ اكتب على الشكل الآسي الأعداد المركبة:  $z_C$  ،  $z_B$  ،  $z_A$ .

2/ أ/ احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$  ، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها.

ب/ حدّد طبيعة المثلث  $ABC$ .

3/ عيّن لاحقة النقطة  $D$  بحيث يكون الرباعي  $ACBD$  معيناً.

4/ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  من المستوي لاحقها  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$

$$\text{حيث: } z' = (-1+i)z + 1 - 3i$$

أ/ عين طبيعة التحويل  $T$  وعناصره المميزة.

ب/ استنتج طبيعة التحويل  $ToT$  وعناصره المميزة.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$

1 / نعتبر النقط  $A(1;0;2)$  ،  $B(1;1;4)$  ،  $C(-1;1;1)$

أ/ أثبت أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويًا.

ب/ بين أن الشعاع  $\bar{n}(3;4;-2)$  عمودي على كل من الشعاعين  $\overline{AB}$  و  $\overline{AC}$  ثم استنتج

معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$

2 / نعتبر المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  حيث:  $(P_1): 3x + 4y - 2z + 1 = 0$  و  $(P_2): 2x - 2y - z - 1 = 0$ .

أ/ بين أن المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متعامدان.

ب/ عيّن تمثيلاً وسطيًا للمستقيم  $(\Delta)$  تقاطع المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$ .

ج/ تحقق أن النقطة  $O(0;0;0)$  لا تنتمي إلى  $(\Delta)$ .

د/ احسب المسافتين  $d(O; (P_1))$  و  $d(O; (P_2))$  واستنتج المسافة  $d(O; (\Delta))$

### التمرين الثالث: (04 نقاط)

$(U_n)$  متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} m = \text{PPCM}(U_3, U_5) \\ d = \text{PGCD}(U_3, U_5) \end{cases} \quad \text{حيث:} \quad \begin{cases} U_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$$

1/ عيّن الحدين  $U_3$  و  $U_5$  ثم استنتج  $U_0$

2/ اكتب  $U_n$  بدلالة  $n$ ، ثم بيّن أن: 2010 حد من حدود  $(U_n)$  وعين رتبته.

3/ عين الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من  $(U_n)$  يساوي 10080

4/  $n$  عدد طبيعي غير معدوم.

أ) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S$  حيث:  $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{2n}$

ب) استنتج بدلالة  $n$  المجموعين  $S_1$  و  $S_2$  حيث:  $S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$

$$S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + \dots + U_{2n-1} \text{ و}$$

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (3x + 4)e^x$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ أ) احسب  $f'$ ،  $f''$  ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم فإن:

$$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x \quad \text{حيث: } f', f'', \dots, f^{(n)}$$

ب) استنتج حل المعادلة التفاضلية:  $y'' = (3x + 16)e^x$

2/ أ) بيّن أن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  وفسر النتيجة هندسيا

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ أ) اكتب معادلة للمماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $\omega$  التي فاصلتها  $-\frac{10}{3}$ .

ب) بين أن  $\omega$  هي نقطة انعطاف المنحنى  $(C_f)$

ج) ارسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  على المجال  $]-\infty; 0]$ .

4/ أ)  $x$  عدد حقيقي من المجال  $]-\infty; 0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد  $\int_{-1}^x te^t dt$  ثم استنتج دالة أصلية

للدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0]$ .

ب)  $\lambda$  عدد حقيقي أصغر تماما من  $-\frac{4}{3}$

احسب بدلالة  $\lambda$  المساحة  $A(\lambda)$  للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيمت التي

$$\text{معادلاتها: } y = 0, \quad x = -\frac{4}{3} \text{ و } x = \lambda, \quad \text{ثم جد } \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) نعتبر المعادلة:  $(E) \dots 13x - 7y = -1$  حيث:  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان.  
حل المعادلة  $(E)$ .

(2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية  $a$  بحيث: 
$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$$

- (3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$ ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $9^n$  على كل من 7 و 13.  
(4) ليكن العدد الطبيعي  $b$  المكتوب، في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي:  $\overline{\alpha 00 \beta 086}$   
حيث:  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان طبيعيين؛  $\alpha \neq 0$ .  
عيّن  $\alpha$  و  $\beta$  حتى يكون  $b$  قابلاً للقسمة على 91.

### التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط  $A(1;0;0)$ ،  $B(0;2;0)$ ،  $C(0;0;3)$  و  $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$

(D) المستقيم الذي يشمل النقطة  $A$  وشعاع توجيهه  $\vec{u}\left(-1; 1; \frac{3}{2}\right)$  و  $(\Delta)$  المستقيم الذي يشمل النقطة  $C$  وشعاع توجيهه  $\vec{v}\left(\frac{1}{2}; 1; -3\right)$

- 1- اكتب تمثيلاً وسيطياً لكل من المستقيمين  $(D)$  و  $(\Delta)$  ثم ادرس الوضع النسبي لهما.
- 2- بين أن:  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة  $G$ ؟
- 3- عين شعاعاً ناظماً  $\vec{n}$  للمستوي  $(ABC)$  ثم اكتب معادلة له.
- 4- احسب المسافة بين النقطة  $O$  والمستوي  $(ABC)$ .
- 5-  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $B$  على المستقيم  $(D)$ .  
(أ) جد إحداثيات النقطة  $H$ .  
(ب) استنتج المسافة بين النقطة  $B$  والمستقيم  $(D)$ .

### التمرين الثالث: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1/ (أ) الشكل المثلثي للعدد المركب  $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  هو  $-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

(ب)  $a^{2011} + \bar{a} = 0$  حيث:  $\bar{a}$  مرافق  $a$

2/ في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

أ) التحويل  $T$  الذي كتابته المركبة:  $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$  دوران زاويته  $-\frac{\pi}{4}$  ومركزه مبدأ المعلم

ب) مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث:  $\arg(z - i) = \frac{-\pi}{4}$  هي المستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة  $A$

ذات اللاحقة  $i$  وشعاع توجيهه  $\vec{u}$  للاحقته  $1+i$ .

3/ المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = \frac{1}{12}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$

$$u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \quad (أ)$$

ب)  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{N}$

ج)  $(u_n)$  متباعدة

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/  $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = x^2 + \ln x^2 - 1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب  $g(1)$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$  في المجال  $]0; +\infty[$

2/  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

أ/ بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  وأن:  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/  $(\delta)$  المنحنى الممثل للدالة  $x \mapsto \ln x$  على المجال  $]0; +\infty[$

- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\delta)$  ثم جد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x$  ، ماذا تستنتج ؟

- ارسم  $(\delta)$  و  $(C_f)$ .

3/ أ/ عدد حقيقي من المجال  $]1; +\infty[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد  $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t dt$

- تحقق أن:  $x \mapsto x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln x$  على المجال  $]1; +\infty[$ .

- استنتج دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$ .

ب/  $\alpha$  عدد حقيقي أكبر تماماً من 1.

احسب بدلالة  $\alpha$  المساحة  $A(\alpha)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(\delta)$  والمستقيمين

الذين معادلتيهما:  $x = 1$  و  $x = \alpha$ ، ثم احسب  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$  :