وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
الحل 1	المادة : الرياضيات
المستوى : 3 ثانوي	الشعبة : ع . د

حل التمرين الأول :(4ن)

1) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين ا وَ ب :.....(1.25ن)

لدينا $\partial = 3$ ن + 2 وَ ب = 7 ن – 5 مع ن ∈ $\mathbb{N}^*$.

نفرض ق قاسم مشترك للعددين ∂ و ب.

إذن ق | ∂ وَ ق | ب ومنه ق |7 ∂ - 3 ب.

وحيث 7 ∂ - 3 ب = 29.

29 عدد أولي إذن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر هي 1 أو 29.

2) تعيين الأعداد الطبيعية ن التي يكون من أجلها القاسم المشترك الأكبر هو 29 :.....(1.25ن)

نضع: $\begin{cases} ا \equiv 0 [29] \\ ب \equiv 0 [29] \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 3ن + 2 \equiv 0 [29] \\ 7ن - 5 \equiv 0 [29] \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 3ن \equiv -2 [29] \\ 7ن \equiv 5 [29] \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 30ن \equiv -20 [29] \\ 28ن \equiv 20 [29] \end{cases}$ بالضرب في (10) / بالضرب في (4)

منه $\begin{cases} ن \equiv -20 [29] \\ -ن \equiv +20 [29] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} ن \equiv 9 [29] \\ ن \equiv 9 [29] \end{cases}$

ومنه قيم ن المطلوبة هي ن = 9 + 29 ك / مع ك ∈ $\mathbb{N}$.

3) تعيين الأعداد الطبيعية α حتى يكون $ا^{\alpha} \equiv 1 [3]$ .....(1.5ن)

لدينا : $\partial = 3$ ن + 2 ومنه $\partial \equiv 2 [3]$

$ا^2 \equiv 2^2 [3]$ أي : $ا^2 \equiv 1 [3]$ و $ا^3 \equiv 2 [3]$

ومنه : $\forall$ هـ ∈ $\mathbb{N}$: $ا^{2هـ} \equiv 1 [3]$ $ا^{2هـ+1} \equiv 2 [3]$

إذن قيم α المطلوبة هي $\alpha = 2$ ه / ه ∈ $\mathbb{N}$.

التمرين الثاني :(4ن)

لدينا : تا(ص) = $ص^3 - (4 - ت)ص^2 + (7 - 8ت)ص + 4 + 7ت$ ..... (I)

1) إثبات أن تا(ص) يقبل جذرا تخيليا صرفا $ص_1$: .....(1ن)

نضع : $ص_1 = \alpha_1 ت_1$ / α_1 ∈ ح ؛

$تا(\alpha_1 ت_1) = -(\alpha_1 ت_1)^3 - (4 - ت)(\alpha_1 ت_1)^2 + (7 - 8ت)(\alpha_1 ت_1) + 4 + 7ت$

$= -\alpha_1^3 ت_1^3 + 4\alpha_1^2 ت_1^2 + 8\alpha_1 ت_1 + 4 + 7ت$

$= 4\alpha_1^2 + 8\alpha_1 ت_1 + 4 + ت(-\alpha_1^3 + \alpha_1^2 + 7\alpha_1 + 7)$

وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
الحل 1	**المادة : الرياضيات**
المستوى : 3 ثانوي	**الشعبة : ع . د**

$$\text{تا}(\alpha_1 ت) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \alpha_1 8 + \alpha_1^2 4 = 0 \quad \ldots\ldots (1) \\ 7 + \alpha_1 7 + \alpha_1^2 - \alpha_1^3 - = 0 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بحل المعادلة (1) نجد الحلين $\alpha_1 = \alpha'$ و $\alpha_1 = \alpha''$ أي حل مضاعف

و (-1) هو أيضا حل للمعادلة (2) (تتحقق من ذلك بالتعويض).

بعد هذا نستنتج أن $ص_1$ = - ت هو الحل التخيلي الصرف المطلوب

2) تعيين الأعداد المركبة α ، β ، γ بحيث تا(ص) = $(ص + ت)(\alpha ص^2 + \beta ص + \gamma)$: **.....(1ن)**

لدينا : تا(ص) = $(ص + ت)(\alpha ص^2 + \beta ص + \gamma)$

$$\alpha ص^3 + (\beta + ت\alpha) ص^2 + (\gamma + ت\beta) ص + ت\gamma = \ldots\ldots (II)$$

بالمطابقة بين الصيغتين (I) و (II) نجد :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + ت\alpha = -4 + ت \\ \gamma + ت\beta = 7 - 8ت \\ ت\gamma = 4 + 7ت \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 7 - 4ت \\ \beta = -4 \end{cases}$$

* حل المعادلة تا(ص) = 0

لدينا تا(ص) = $(ص + ت)(ص^2 - 4ص + 7 - 4ت)$

تا(ص) =0 $\Leftrightarrow (ص + ت)(ص^2 - 4ص + 7 - 4ت) = 0$

$\Leftrightarrow$ (ص + ت = 0 $\vee$ $ص^2 - 4ص + 7 - 4ت$) = 0

$\Leftrightarrow$ (ص = - ت $\vee$ $ص^2 - 4ص + 7 - 4ت = 0$ .....(3))

نحل المعادلة (3) باستعمال المميز المختصر Δ'.

لدينا : $\Delta' = (-2)^2 - (1)(7 - 4ت) = -3 + 4ت$ **.....(0.25ن)**

نحسب الجذران التربيعيان للعدد Δ' = -3 + 4ت

لذلك نضع :

δ = س + ت ع و $\delta^2 = \Delta'$ / (س ، ع) $\in$ $\mathbb{C}^2$

إذن δ^2 = $س^2 - ع^2 + 2ت س ع$

$$\Delta' = \delta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |\Delta'| = |\delta^2| \\ س^2 - ع^2 = -3 \\ 2 س ع = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} س^2 + ع^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} \\ س^2 + ع^2 = -3 \\ س ع = 2 \end{cases}$$

وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
الحل 1	**المادة : الرياضيات**
المستوى : 3 ثانوي	**الشعبة : ع . د**

$$\begin{cases} س^2 + ع^2 = 5 & \ldots(أ) \\ س^2 - ع^2 = -3 & \ldots(ب) \\ س ع = 2 & \ldots(جـ) \end{cases}$$

بجمع (∠) وَ (بَ) طرفا لطرف نجد : $2س^2 = 2$ ومنه $س^2 = 1$

أي : س = 1 ∨ س = -1

لما س = 1 نجد حسب (جـَ) ع = 2

لما س = -1 نجد حسب (جـَ) ع = - 2

ومنه : δ = 1 + 2 ت أو δ = - 1 – 2 ت .....(0.5ن)

نحسب الآن حلي المعادلة (3). $ص_2$ ، $ص_3$

$ص_2 = 2+1+2ت$ وَ $ص_3 = 2-1-2ت$

أي $ص_2 = 3+2ت$ وَ $ص_3 = 1-2ت$ .....(0.5ن)

الخلاصة : حلول المعادلة تا(ص) = 0 هي $ص_1 = - ت$ ، $ص_2 = 3+2ت$ و $ص_3 = 1-2ت$

3) ∂ صورة $ص_1$ ، ب صورة $ص_2$ ، جـ صورة $ص_3$.

إذن ∂ (0 ، -1) ، ب (3 ، 2) ، جـ (1 ، -2).

لإثبات أن المثلث ∂ ب جـ قائم في∂ نحسب أطوال أضلاعه

ونختبر نظرية فيثاغورث إذا كانت محققة فيه.

لدينا : $اب^2 = (3-0)^2 + (2+1)^2 = 18$

$اجـ^2 = (1-0)^2 + (2+1-)^2 = 2$

$ب جـ^2 = (1-3)^2 + (2-2-)^2 = 20$

نلاحظ أن $اب^2 = اجـ^2 + ب جـ^2$ ومنه ∂ ب جـ مثلث قائم في ∂ .....(0.5ن)

ب – كتابة معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ∂ ب جـ.

نرمز لهذه الدائرة بالرمز (د).

بما أن ∂ ب ج مثلث قائم في ∂ فإن وتره هو الضلع [ب ج] ومنتصف [ب ج] هو مركز هذه الدائرة مع [ب ج] قطر لها.

بفرض ω منتصف [ب ج] لدينا : $\omega \left(\frac{س_ب + س_{جـ}}{2}, \frac{ع_ب + ع_{جـ}}{2}\right)$ وَ $نق = \frac{ب جـ}{2}$

إذن ω (2 ، 0) و $نق = \frac{\overline{20}_{ق}}{2} = \overline{5}_{ق}$.

(د) : $(س-2)^2+(ع-0)^2=(\bar{5}_{ق})^2$

$(س-2)^2+ع^2=5$ وهي معادلة الدائرة المطلوبة. .....(0.25ن)

حل المسألة :(12ن)

لدينا : $تا(س)=\frac{1}{س^2-5س+6}$

1) دراسة تغيرات الدالة تا : .....(3ن)

الدالة تا معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على $\Re$ - { 2 ، 3}

لأن $س^2-5س+6=0 \Leftrightarrow (س=2 \vee س=3)$

س	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$س^2-5س+6$	+	0 -	0 +	

نهـا $تا(س)=0$ لأن $(س^2-5س+6) \to +\infty$ $\leftarrow |س| \to +\infty$

نهـا $تا(س)=$ نهـا $\frac{1}{س^2-5س+6}=+\infty$ $\leftarrow$ نهـا $(س^2-5س+6)$ $\leftarrow$ 0 $\leftarrow$ $س \to 2$

نهـا $تا(س)=$ نهـا $\frac{1}{س^2-5س+6}=-\infty$ $\leftarrow$ نهـا $(س^2-5س+6)$ $\leftarrow$ 0 $\leftarrow$ $س \to 2$

نهـا $تا(س)=$ نهـا $\frac{1}{س^2-5س+6}=-\infty$ $\leftarrow$ نهـا $(س^2-5س+6)$ $\leftarrow$ 0 $\leftarrow$ $س \to 3$

نهـا $تا(س)=$ نهـا $\frac{1}{س^2-5س+6}=+\infty$ لأن $(س^2-5س+6)$ $\leftarrow$ 0 $\leftarrow$ $س \to 3$

- حساب الدالة المشتقة ودراسة إشارتها.

$تأ(س)=\frac{-2س+5}{(س^2-5س+6)^2}$

$تأ(س)=0 \Leftrightarrow س=\frac{5}{2}$

$تأ(س)>0 \Leftrightarrow س<\frac{5}{2}$ وَ $تأ(س)<0 \Leftrightarrow س>\frac{5}{2}$

إذن تا متزايدة تماماً على كل من المجالين] $-\infty$ ، 2 [و] 2 ، $\frac{5}{2}$ [

وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
الحل 1	المادة : الرياضيات
المستوى : 3 ثانوي	الشعبة : ع . د

تا متناقصة تماماً على كل من المجالين] $\frac{5}{2}$ ، 3 [و] 3 ، $+\infty$ [

جدول تغيرات :

س	$-\infty$		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
تأ(س)	+		+	0	-	‖	-		
تا(س)	$+\infty$	↘		↘	-4	‖	$+\infty$	↘	0
	0		$-\infty$			‖	$-\infty$		

2) * التعبير عن سَ و عَ بدلالة س و ع :

ت : ن (س ، ع) ↳ نَ (سَ ، عَ)

حيث نَ نظيرة ن بالنسبة للمستقيم (ق) : س = $\frac{5}{2}$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} \frac{س+سَ}{2}=\frac{5}{2} \\ عَ=ع \end{array}\right.$ ومنه : $\left\{\begin{array}{l} سَ=5-س \\ عَ=ع \end{array}\right.$ و.هـ.م ..... **(0.5ن)**

- **البحث عن صورة (ى) بالتناظر ت :**
- نكتب س وَ ع بدلالة سَ وَ عَ ثم نعوض في معادلة (ى).

إذن : $\left\{\begin{array}{l} س=5-سَ \\ ع=عَ \end{array}\right.$

لدينا : $ع=\frac{1}{س^2-5س+6}$ إذن بالتعويض نجد :

$عَ=\frac{1}{(5-سَ)^2-5(5-سَ)+6}$ ومنه : $عَ=\frac{1}{سَ^2-5سَ+6}$

وهي معادلة (ىَ) صورة (ى) بالتناظر ت ..... **(0.25ن)**

نلاحظ أن معادلة (ىَ) هي نفسها معادلة (ى)

إذن (ىَ) منطبق على (ى) ومنه نستنتج ما يلي :

المستقيم (ق) : س = $\frac{5}{2}$ هو محور تناظر المنحنى (ى) ..... **(0.25ن)**

وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
الحل 1	المادة : الرياضيات
المستوى : 3 ثانوي	الشعبة : ع . د

3) كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (ى) في النقطة ذات الفاصلة $س_0 = 4$ **:**

(Δ) : ع = تأ (4) (س – 4) + تا (4).

لدينا : $تا(4) = \frac{1}{6+20-16} = \frac{1}{2}$ وَ $تأ(4) = \frac{-2+(4)5}{(2)^2} = -\frac{3}{4}$.

إذن (Δ) : ع = $-\frac{3}{4}$(س – 4) + $\frac{1}{2}$ (Δ) : ع = $-\frac{3}{4}$ س + $\frac{7}{2}$ **.....(0.75ن)**

دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (ى) : .....(1ن)

حسب دراسة النهايات نستنتج أن (ى) يقبل 6 فروع لا نهائية مقاربة وثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها ع = 0 ، س = 2 ، س = 3.

(ى) يقطع (عَ ع) في النقطة ك (0 ، $\frac{1}{6}$)

أنظر رسم (ى) في الصفحة 8/8. .....(1.5ن)

4) ها هو اقتصار تا على المجال] 3 ، +∞ [.....(0.5ن)

نلاحظ أن الدالة تا مستمرة ومتناقصة تماما (رتيبة تماما) على المجال] 3 ، +∞ [فهي إذن تقابل لهذا المجال في المجال] 0 ، +∞[.

إذن اقتصار تا "ها" هو تطبيق تقابلي من] 3 ، +∞[نحو]0 ، +∞[وبالتالي ها تقبل دالة عكسية $ها^{-1}$

$ها^{-1}$ معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال] 0 ، +∞ [وتأخذ قيمها في المجال] 3 ، +∞[

جدول تغيرات الدالة $ها^{-1}$ يساعدنا في رسم منحناها ($ى^{-1}$). **.....(0.75ن)**

س	0	+∞
$ها^{-1}(س)$	-	
$ها^{-1}(س)$		+∞ ↘ 3

من المعلوم أن (ى) و ($ى^{-1}$) متناظران بالنسبة للمنصف الأول الذي معادلته ع = س.

معادلة المماس للمنحنى($ى^{-1}$) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$.

(Δ') : ع = $ها^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + ها^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(س - \frac{1}{2}\right)$

$ها^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = س \Leftrightarrow ها(س) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow تا(س) = \frac{1}{2}$

وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
الحل 1	**المادة : الرياضيات**
المستوى : 3 ثانوي	**الشعبة : ع . د**

تا (س) = $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ س = 4 حسب ما سبق.

هـا$^{-1}$ $\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\text{هـا}(4)} = \frac{1}{\text{تا}(4)} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$ (حسب ما سبق)

ومنه : (Δ) : ع = $-\frac{4}{3}$ س + $\left(\frac{1}{2} + 4\right)$

(Δ) : ع = $-\frac{4}{3}$ س + $\frac{14}{3}$.

5) تعيين العددين ∂ و ب حيث : .....(1ن)

$\forall$ س $\in$ $\Re$ - {2 ، 3} تا(س) = $\frac{\text{ا}}{\text{س} - 3} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - 2}$

لدينا : تا(س) = $\frac{\text{ا}}{\text{س} - 3} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - 2}$ = $\frac{(\text{ا} + \text{ب})\text{س} - (3\text{ب} + 2\text{ا})}{(\text{س} - 3)(\text{س} - 2)}$.

بالمطابقة نجد : $\left.\begin{matrix} \text{ا} + \text{ب} = 0 \\ 3 + 2\text{ب} = -1 \end{matrix}\right\}$ ومنه : $\left.\begin{matrix} \text{ا} = -1 \\ \text{ب} = +1 \end{matrix}\right\}$

إذن : $\forall$ س $\in$ $\Re$ - {2 ، 3} تا(س) = $\frac{-1}{\text{س} - 3} + \frac{1}{\text{س} - 2}$

* حساب م$_{\text{ن}}$ بدلالة ن : .....(1ن)

لدينا م$_{\text{ن}}$ = تا(4) + تا (5) + تا(6) + . . . + تا(ن) حيث ن $\in$ $\aleph$ و ن > 3

نحسب حدود م$_{\text{ن}}$ كما يلي :

تا(4) = $\frac{1}{2}$ + $\frac{-1}{1}$

تا(5) = $\frac{1}{3}$ + $\frac{-1}{2}$

تا(6) = $\frac{1}{4}$ + $\frac{-1}{3}$

تا(7) = $\frac{1}{5}$ + $\frac{-1}{4}$

⋮

تا(ن) = $\frac{1}{\text{ن} - 2} + \frac{-1}{\text{ن} - 3}$

بالجمع طرفا لطرف نجد :

تا (4) + تا(5) + تا (6) + ... + تا(ن) = - 1 + $\frac{1}{\text{ن} - 2}$

وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
الحل 1	المادة : الرياضيات
المستوى : 3 ثانوي	الشعبة : ع . د

إذن : $م_{ن} = -1 + \frac{1}{2 - ن}$

حساب $\lim_{ن \to +\infty}$ $م_{ن}$: .....**(0.5ن)**

$\lim_{ن \to +\infty} م_{ن} = \lim_{ن \to +\infty} \left[-1 + \frac{1}{2-ن} \right] = -1$ (لأن $\frac{1}{2-ن} \to 0$)