وزارة التربية الوطنية	**الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**
الحل 3	**المادة : الرياضيات**
المستوى : 3 ثانوي	**الشعبة : ع . د**

تصحيح المسألة :

I − مجموعة تعريف الدالة تا$_{\text{ط}}$: ف$_{\text{تاط}}$ $=]-\infty \text{ ، } 2\text{ط}[\cup]2\text{ط} \text{ ، } +\infty[$ و $\text{ط} \in \text{ح} - \{-2 \text{ ، } 2\}$.

- إثبات وجود نقطتين ثابتتين مشتركتين لكل المنحنيات البيانية للدوال تا$_{\text{ط}}$:

نضع : $\text{ع} = 2\text{س} - \text{ط} + \dfrac{8 + 2\text{ط}^2}{\text{س} - 2\text{ط}}$

$$\text{ع} = \frac{(2\text{س} - \text{ط})(\text{س} - 2\text{ط}) + 8 + 2\text{ط}^2}{\text{س} - 2\text{ط}} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س ع} - 2\text{س}^2 - 8 = 0 \\ 5\text{س} - 2\text{ع} = 0 \end{cases}$$

بعد حل الجملة : $\begin{cases} \dfrac{2}{5}\text{ع}^2 - \dfrac{8}{25}\text{ع}^2 - 8 = 0 \\ \text{س} = \dfrac{2}{5}\text{ع} \end{cases}$ نجد : ن$_1$ (4، 10) و ن$_2$ (−4 ، −10)

II − ها(س) $= \dfrac{2\text{س}^2 + 8}{\text{س}}$ ف$_{\text{ها}}$ $= \text{ح}^* =]-\infty \text{ ، } 0[\cup]0 \text{ ، } +\infty[$

1− كتابة ها(س) على شكل تا$_{\text{ط}}$(س)

تا$_{\text{ط}}$(س) $= \dfrac{2\text{س}^2 - 5\text{ط س} + 8 + \ldots}{\text{س} - 2\text{ط}}$ بعد توحيد المقامات والتبسيط.

بالمطابقة (ها(س) مع تا$_{\text{ط}}$(س)) نجد : ط = 0 أي ها(س) = تا$_0$(س)

2− دراسة تغيرات الدالة ها : ف$_{\text{ها}}$ $=]-\infty \text{ ، } 0[\cup]0 \text{ ، } +\infty[$

$$\lim_{\text{س} \to -\infty} \text{ها(س)} = \lim_{\text{س} \to -\infty} \frac{2\text{س}^2}{\text{س}} = -\infty$$

$$\lim_{\text{س} \to +\infty} \text{ها(س)} = \lim_{\text{س} \to +\infty} \frac{2\text{س}^2}{\text{س}} = +\infty$$

$\lim\limits_{\text{س} \to 0^-} \text{ها(س)} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{\text{س} \to 0^-} (2\text{س}^2 + 8) = 8$ و $\lim\limits_{\text{س} \to 0^-} \text{س} = 0^-$

$\lim\limits_{\text{س} \to 0^+} \text{ها(س)} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{\text{س} \to 0^+} (2\text{س}^2 + 8) = 8$ و $\lim\limits_{\text{س} \to 0^+} \text{س} = 0^+$

* حساب المشتق :

$$\forall \text{ س} \in \text{ح}^* : \text{ها}'(\text{س}) = \frac{2\text{س}^2 - 8}{\text{س}^2}$$

- إشارة المشتق :

$\text{ها}'(\text{س}) = 0 \Leftrightarrow 2(\text{س}^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \text{س} = 2 \vee \text{س} = -2$

$\text{ها}'(\text{س}) > 0 \Leftrightarrow \text{س} \in]-\infty \text{ ، } -2[\cup]2 \text{ ، } +\infty[$ إذن الدالة ها متزايدة تماماً.

$\text{ها}'(\text{س}) < 0 \Leftrightarrow \text{س} \in]-2 \text{ ، } 2[- \{0\}$ إذن الدالة ها متناقصة تماماً.

وزارة التربية الوطنية	**الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**
الحل 3	**المادة : الرياضيات**
المستوى : 3 ثانوي	**الشعبة : ع . د**

* جدول تغيرات الدالة ها :

س	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
ها$'$(س)		+		−	‖	−		+	
ها(س)	$-\infty$ ↗		تا$(-2) = -8$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	تا$(-2) = -8$	↗ $+\infty$	

* الفروع اللانهائية :

*س $= 0$ هي معادلة المستقيم المقارب المائل (الأول) للمنحنى (ي ها) وهو حامل محور التراتيب.

* لدينا : $\lim_{س \to \pm\infty}$ تا(س) $= +\infty$: إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته من الشكل ع = أ س + ب

* تعيين العدد الحقيقي أ :

$$\lim_{س\to+\infty} \frac{ها(س)}{س} = \lim_{س\to+\infty} \frac{2س^2+8}{س^2} = \lim_{س\to+\infty} \frac{2س^2}{س^2} = 2$$

ومنه أ $= 2$

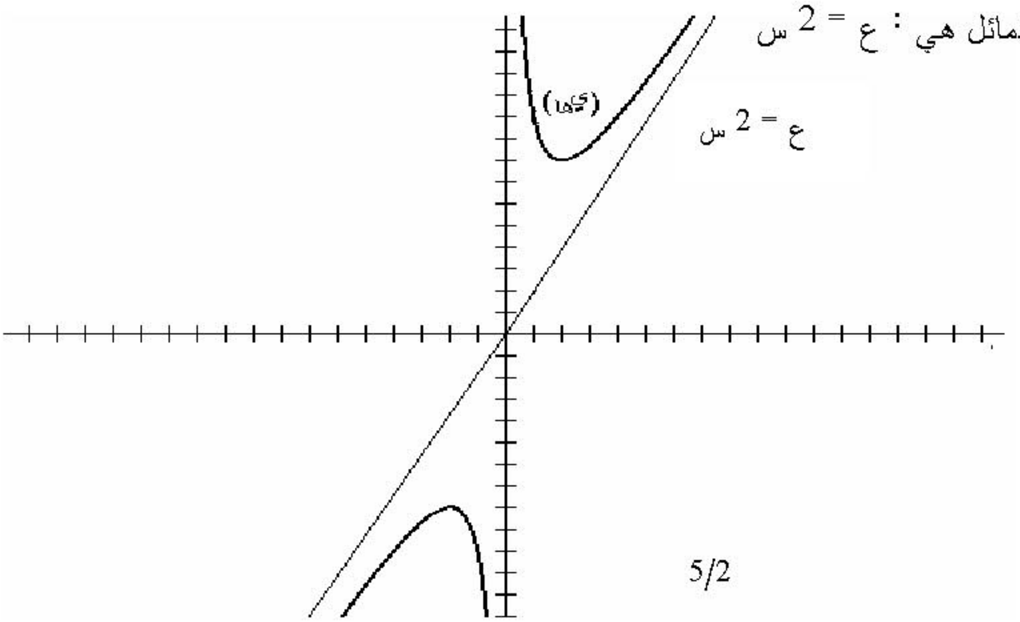
* تعيين العدد الحقيقي ب :

$$\lim_{س\to+\infty} [ها(س) - أ\,س] = \lim_{س\to+\infty} \left[\frac{2س^2+8}{س^2} - 2س\right] = 0$$

لأن البسط يؤول إلى 8 والمقام يؤول إلى $+\infty$ لمّا س يؤول إلى $+\infty$.

ومنه معادلة المستقيم المقارب المائل هي : ع $= 2$ س

التمثيل البياني :

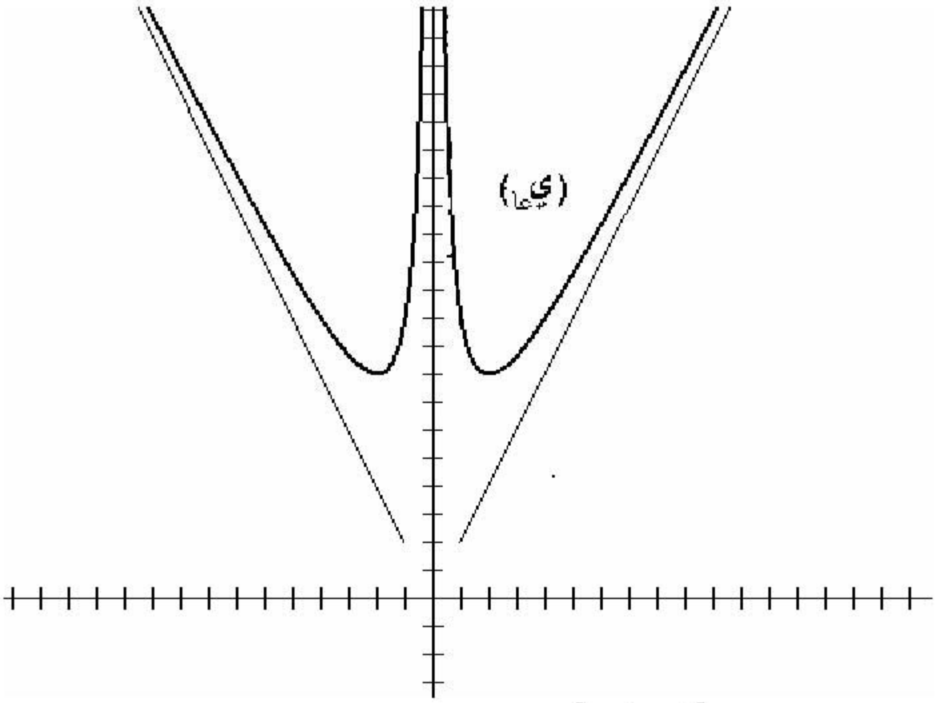


3- نضع عا(س) = $\frac{2س^2-8}{|س|}$ فـعا = ;* و ∀س ∋ ;* : |− س| = |س| و (−س)^2 = س^2

عا(−س) = $\frac{2(-س)^2-8}{|-س|}$ = عا(س) ومنه عا دالة زوجية

التمثيل البياني للدالة عا : ∀س ∋ ;$^{*+}$: عا(س) = ها (س) ومنه (يعا) منطبق على (يها).

∀س ∋ ;$^{*-}$: (يعا) هو نظير (يها) بالنسبة إلى (عَ ع)



4- φ إقتصار الدالة عا على المجال]2 ، +∞ [

∀س ∋]2 ، +∞[: φ (س) = عا(س)

إذن الدالة φ مستمرة ورتيبة (متزايدة تماماً) على المجال]2 ، +∞[

ومنه الدالة φ تقبل دالة عكسية لها $φ^{-1}$

جدول تغيرات الدالة $φ^{-1}$:

س	8 +∞
$φ^{-1}$	2 ↗ +∞

حساب φ (4) وَ $φ^{-1}$ (10)

φ (4) = عا(4) = 10 ⇐ $φ^{-1}$ (10) = 4.

وزارة التربية الوطنية	**الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**
الحل 3	**المادة : الرياضيات**
المستوى : 3 ثانوي	**الشعبة : ع . د**

5 – مناقشة المعادلة : $2\text{س}^2 - \varphi\,\text{س} + 8 = 0$

$2\text{س}^2 - \varphi\,\text{س} + 8 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2\text{س}^2+8}{\text{س}}$ و $\text{س} \in \text{؛}^*$.

أي $\text{ع} = \dfrac{2\text{س}^2+8}{\text{س}}$

من أجل $\alpha \in]-\infty \text{ ، } -8[$: المعادلة تقبل حلين سالبين.

من أجل $\alpha = -8$: المعادلة تقبل حلا مضاعفاً وَ هو $\text{س} = -2$

من أجل $\alpha \in]-8 \text{ ، } +8[$: المعادلة لا تقبل حلاً.

من أجل $\alpha = +8$: المعادلة تقبل حلا مضاعفاً وَ هو $\text{س} = +2$

من أجل $\alpha \in]8 \text{ ، } +\infty[$: المعادلة تقبل حلين موجبين.

III – $\text{لا}(\text{س}) = \dfrac{2\,\text{جب}^2\text{س}+8}{\text{جب}\,\text{س}}$

1- تعيين مجموعة تعريف الدالة لا : $\text{فـلا} : \{\text{س} \in \text{؛} \,/\, \text{جب}\,\text{س} \neq 0\}$ ومنه $\text{فـلا} = \text{؛} - \{\text{ك}\pi\}$ و $\text{ك} \in \text{ص}$

2π دور للدالة لا :

نعلم أن : $\forall\, \text{س} \in \text{؛} : \text{جب}(\text{س} + 2\pi) = \text{جب}\,\text{س}$

ومنه : $\text{لا}(\text{س} + 2\pi) = \dfrac{2\,\text{جب}^2(\text{س}+2\pi)+8}{\text{جب}(\text{س}+2\pi)} = \dfrac{2\,\text{جب}^2\text{س}+8}{\text{جب}\,\text{س}} = \text{لا}(\text{س})$ مع $\text{س} \in \text{فـلا}$

2. لا مركب دالتين : نضع $\text{تا}(\text{س}) = \text{جب}\,\text{س}$ وَ لدينا $\text{ها}(\text{س}) = \dfrac{8\text{س}^2+8}{\text{س}}$

$(\text{ها} \circ \text{تا})(\text{س}) = \text{ها}[\text{تا}(\text{س})] = \text{ها}[\text{جب}\,\text{س}] = \dfrac{2\,\text{جب}^2\text{س}+8}{\text{جب}\,\text{س}} = \text{لا}(\text{س})$. إذن $\text{لا}(\text{س}) = \text{ها} \circ \text{تا}$.

3. حساب المشتق الدالة لا :

$\forall\, \text{س} \in \text{فـلا} : \text{لاَ}(\text{س}) = \left(\dfrac{2\,\text{جب}^2\text{س}+8}{\text{جب}\,\text{س}}\right)'$

$\text{لا}'(\text{س}) = \dfrac{4\,\text{جب}^2\text{س} \cdot \text{تجب}\,\text{س} - \text{تجب}\,\text{س}\,(2\,\text{جب}^2\text{س} + 8)}{\text{جب}^2\,\text{س}}$

بعد التبسيط : $\text{لاَ}(\text{س}) = \text{تجب}\,\text{س}\ \dfrac{2\,\text{جب}^2\text{س}+8}{\text{جب}\,\text{س}}$

وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
الحل 3	المادة : الرياضيات
المستوى : 3 ثانوي	الشعبة : ع . د

4. حل المعادلة لا(س) = 10

لا(س) = 10 ⇔ $\frac{2\text{ جب}^2\text{س} + 8}{\text{جب س}} = 10$

⇔ جب^{2}س − 5 جب س + 4 = 0

نضع جب س = ع ومنه لا (س) = 0 ⇔ $\begin{cases} \text{جب س} = \text{ع} \\ \text{ع}^2 - 5\text{ع} + 4 = 0 \end{cases}$

المعادلة : ع^2 − 5 ع + 4 = 0 تقبل حلين : ع$_1$ = 1 وَ ع$_2$ = 4

- جب س = 4 : قضية دوما خاطئة لأن : ∀ س ∈ ؛ : جب س [−1 ، 1].
- جب س = 1 ⇔ س = $\frac{\pi}{2}$ + 2ك π مع ك ∈ ص

مجموعة حلول المعادلة لا (س) = 10 هي { $\frac{\pi}{2}$ + 2ك π } وَ ك ∈ ص.