

EXERCICE 1

4 points

I.a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$.

I.b. Donc pour tout n dans \mathbb{N} , on a $v_n = v_0 \times q^n = -5 \times (\frac{1}{3})^n$. Or $v_n = u_n - 6$ donc $u_n = v_n + 6$ et on obtient bien $u_n = -5 \times (\frac{1}{3})^n + 6$

I.c. $\frac{1}{3} \in]-1; 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{3})^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5 \times (\frac{1}{3})^n = 0$ et donc on en déduit facilement que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$

2.a. Appliquons la formule de récurrence définissant (w_n) pour $n = 10$: $10w_{10} = 11w_9 + 1$ donc $10w_{10} = 11 \times 19 + 1 = 210$ donc $w_{10} = 21$

2.b. On conjecture que la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $w_0 = 1$, autrement dit que pour tout n dans \mathbb{N} , on a $w_n = 2n + 1$. Démonstrons-le par récurrence sur n : notons \mathcal{P}_n la proposition « $w_n = 2n + 1$ ».

- Initialisation : $w_0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
- Hérédité : Soit n un entier quelconque dans \mathbb{N} . Supposons \mathcal{P}_n vraie. On sait que $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1$. Or par hypothèse de récurrence, on sait que $w_n = 2n + 1$ donc $(n+1)w_{n+1} = (n+2)(2n+1) + 1 = 2n^2 + 5n + 3 = (2n+3)(n+1)$. Or $n+1 \neq 0$ donc on en déduit que $w_{n+1} = 2n+3 = 2(n+1) + 1$ et donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie. Ainsi, la proposition \mathcal{P}_n est héréditaire.
- Conclusion : par le principe de récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout n dans \mathbb{N} , à savoir que pour tout n dans \mathbb{N} , $w_n = 2n + 1$ d'où $w_{2009} = 4019$

EXERCICE 2

6 points

I.1. D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc par passage à l'inverse, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + xe^{-x} = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + xe^{-x}) = \ln(1) = 0$ par continuité de la fonction \ln en 1. On a donc bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

I.2. Posons $u(x) = 1 + xe^{-x}$ pour tout x dans $[0; +\infty[$. La fonction u est clairement dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout x dans $[0; +\infty[$, on a :

$$u'(x) = 0 + 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

On sait que $e^{-x} > 0$. D'autre part, $x \geq 0$ donc $xe^{-x} \geq 0$ donc $u(x) \geq 1 > 0$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $[0; +\infty[$ donc d'après le cours, $f = \ln \circ u$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout x dans $[0; +\infty[$, on a :

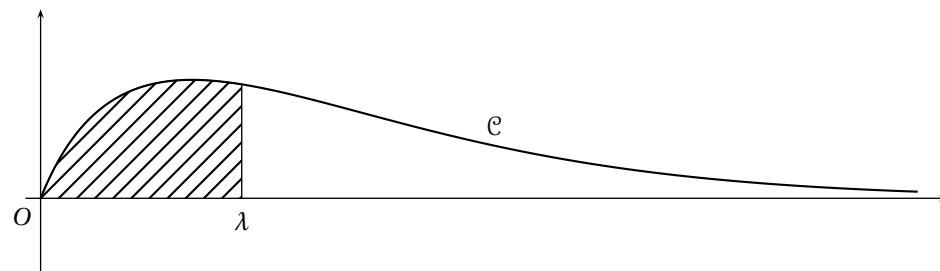
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{(1-x)e^{-x}}{1+xe^{-x}}$$

On sait que $e^{-x} > 0$ et $u(x) = 1 + xe^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est bien du signe de $1 - x$.

croissante sur $[0; 1]$ puis strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

II.1.a. Représentation graphique de $A(\lambda)$:

La fonction f est continue et positive sur $[0; +\infty[$ donc l'intégrale $A(\lambda)$ désigne l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$:



II.1.b. D'après la question **I.3.** on sait que f présente un maximum en $x = 1$ donc pour tout x dans $[0; +\infty[$, $f(x) \leq f(1)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^\lambda f(x) dx \leq \int_0^\lambda f(1) dx$, soit $A(\lambda) \leq \lambda \times f(1)$ (c'est évident géométriquement !)

II.2.a. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^{-x} & u(x) &= -e^{-x} \\ v(x) &= x & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^\lambda xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^\lambda - \int_0^\lambda -e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} + \int_0^\lambda e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} + [-e^{-x}]_0^\lambda$$

donc finalement $\int_0^\lambda xe^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$

II.2.b. On sait que pour tout x dans $[0; +\infty[$, $xe^{-x} \geq 0$ donc $\ln(1 + xe^{-x}) \leq xe^{-x}$. Par croissance de l'intégrale (les fonctions sont bien continues sur $[0; \lambda]$), on obtient :

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda \ln(1 + xe^{-x}) dx \leq \int_0^\lambda xe^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$$

II.3. Pour $\lambda = 5$, une calculatrice donne $\lambda \times f(1) \approx 1,57$ et $-\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 \approx 0,96$. C'est donc la deuxième méthode qui donne le meilleur majorant dans le cas $\lambda = 5$:

$$A(\lambda) \leq 0,96$$

$$\text{I. } \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \quad \square$$

II.1.a. Les jetons sont indiscernables au toucher donc on peut légitimement supposer qu'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Il y a $\binom{10}{2}$ manières de choisir 2 jetons parmi 10 et il y a $\binom{7}{2}$ manières de choisir 2 jetons blancs parmi les 7 jetons blancs. Donc

$$p(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

II.1.b. De même, 6 jetons portent des numéros impairs donc $p(B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$.

II.1.c. De même, 4 jetons blancs portent des numéros impairs donc $p(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$. Ainsi, $p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$ alors que $p(A \cap B) = \frac{2}{15} = \frac{6}{45}$ donc $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

II.2.a. La variable aléatoire X peut valoir 0, 1 ou 2.

$$p(X=0) = \frac{\binom{7}{10} \times \binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15},$$

$$p(X=1) = \frac{\binom{7}{10} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15},$$

$$p(X=2) = \frac{\binom{2}{10} \times \binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}. \text{ D'où :}$$

k	0	1	2
$p(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

II.2.b. $E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \frac{7}{5} : E(X) = \frac{7}{5}$

EXERCICE 4

5 points (obligatoire)

1.a. $OM = |z|$ et $OM_1 = \left| \frac{1}{z} \right|$ donc $OM \times OM_1 = |z| \times \left| \frac{1}{z} \right| = \left| z \times \frac{1}{z} \right| = |1| = 1$.
D'autre part, $(u; OM) = \arg(z) \quad [2\pi]$ et $(u; OM_1) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$ donc on a bien $(u; OM_1) = -(u; OM) \quad [2\pi]$.

1.b. cf. figure.

2.a. $z' = z_{M'} = \frac{z_M + z_{M_1}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$ donc on a bien $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

2.b. $z_{B'} = \frac{1}{2} \left(2i + \frac{1}{2i} \right) = \frac{1}{2} \left(2i - \frac{1}{2}i \right) = \frac{3}{4}i$ et de même on trouve $z_{C'} = -\frac{3}{4}i$.

2.c. cf. figure.

3. On a clairement les équivalences suivantes :

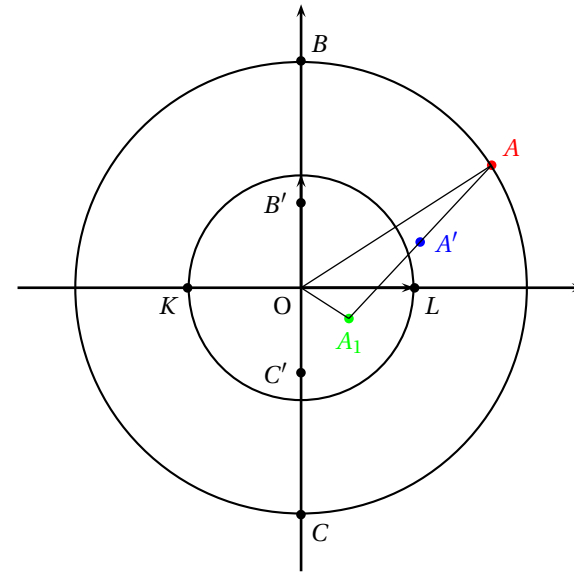
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2z &= z + \frac{1}{z} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1}{z} \\ \Leftrightarrow z^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow z &= 1 \text{ ou } z = -1 \end{aligned}$$

Notons (en devançant l'énoncé) K et L les points d'affixes respectives -1 et 1 . Alors l'ensemble des points M tels que $M' = M$ est l'ensemble $\{K; L\}$

4. Un point M d'affixe z appartenant au cercle de centre O et de rayon 1 vérifie $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$z' = \frac{1}{2} \left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos(\theta), \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

ce qui montre bien que M' appartient au segment $[KL]$.



1.a. Le couple $(x, y) = (1, 1)$ est une solution particulière évidente. L'équation (E) est donc équivalente à l'équation $(E') : 8(x - 1) = 5(y - 1)$.

• Soit (x, y) une solution de (E) . $5 \mid 5(y - 1)$ donc $5 \mid 8(x - 1)$. Or $5 \wedge 8 = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, $5 \mid x - 1$. Soit donc k dans \mathbb{Z} tel que $x - 1 = 5k$. Alors $x = 1 + 5k$. L'équation (E') donne alors $8(5k) = 5(y - 1)$ donc $8k = y - 1$ et $y = 1 + 8k$. Ainsi, (x, y) est solution de (E) , s'il existe k dans \mathbb{Z} tel que $x = 1 + 5k$ et $y = 1 + 8k$.

• Conclusion : $S_{(E)} = \{(1 + 5k, 1 + 8k), k \in \mathbb{Z}\}$

1.b. $8p - 5q = (m - 1) - (m - 4) = 3$ donc (p, q) est une solution de (E) . Par suite, il existe k dans \mathbb{Z} tel que $p = 1 + 5k$, et donc $m = 8p + 1 = 40k + 9$ donc on a bien $m \equiv 9 \pmod{40}$

1.c. Ce nombre est bien sûr $m_0 = 2009$, pour lequel $p_0 = 251$ et $q_0 = 401$.

2.a. $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ donc $2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{7}$: $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$

2.b. Procédons à la division euclidienne de 2009 par 3 : $2009 = 669 \times 3 + 2$ donc $2^{2009} = (2^3)^{669} \times 2^2 \equiv 1 \times 4 \equiv 4 \pmod{7}$ donc le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est 4 .

3.a. $10 \equiv 3 \pmod{7}$ donc $10^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$ donc $10^3 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}$.

3.b. N est divisible par 7 ssi $N \equiv 0 \pmod{7}$. Cette équation est équivalente à $a \times 10^3 + b \equiv 0 \pmod{7}$, elle-même équivalente à $-a + b \equiv 0 \pmod{7}$, soit $a \equiv b \pmod{7}$

$a = 1$: la condition $b \equiv 1 \pmod{7}$ avec $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne $b = 1$ ou $b = 8$. D'où $N = 1001$ et $N = 1008$.

$a = 2$: la condition $b \equiv 2 \pmod{7}$ avec $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne $b = 2$ ou $b = 9$. D'où $N = 2002$ et $N = 2009$.

$a = 3$: la condition $b \equiv 3 \pmod{7}$ avec $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne $b = 3$. D'où $N = 3003$.

$a = 4$: la condition $b \equiv 4 \pmod{7}$ avec $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne $b = 4$. D'où $N = 4004$.

$a = 5$: la condition $b \equiv 5 \pmod{7}$ avec $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne $b = 5$. D'où $N = 5005$.

$a = 6$: la condition $b \equiv 6 \pmod{7}$ avec $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne $b = 6$. D'où $N = 6006$.

$a = 7$: la condition $b \equiv 7 \pmod{7}$ avec $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne $b = 0$ ou $b = 7$. D'où $N = 7000$ et $N = 7007$.

$a = 8$: la condition $b \equiv 8 \pmod{7}$ avec $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne $b = 1$ ou $b = 8$. D'où $N = 8001$ et $N = 8008$.

$a = 9$: la condition $b \equiv 9 \pmod{7}$ avec $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne $b = 2$ ou $b = 9$. D'où $N = 9002$ et $N = 9009$.