التصحيح وسلم تنقيط — التاريخ: 24 /2009/05

ثانوية بن الهيثم البيض — الأستاذ : ب.حميدي

تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول : (3 نقاط)

1) الجملة خاطئة لأن : $2009 = 7 \times 287$ أي 7 يقسم 2009 . **0.5**

2) الجملة صحيحة لأن : $2009 = 7 \times 287$ و $1430 = 2\times5\times 11\times 13$

و $PGCD(2009,1430) = 1$. **0.5**

3) الجملة صحيحة لأن المعادلة المعطاة تكافئ : $287 x + 3 y = 1$ وبما أن 287 و 3 أوليان فيما بينهما

فإن حسب نظرية بيزو توجد على الأقل ثنائية (α , β) تحقق $287 \alpha + 3 \beta = 1$. **01**

4) الجملة خاطئة لأن من أجل $k = 2$ (مثلا) الثنائية $(-4 , 51)$ ليست حلا للمعادلة المعطاة فعلا

$24(-4) +35(51) = 1689$ و $1689 \neq 9$. **0.5**

5) الجملة خاطئة لأنه لايوجد أي عدد طبيعي a يحقق : $a > 9$ و $8a^2 + 0\times a + 9 = 2009$ لأن هذه

المعادلة تكافئ $a^2 = 250$ ولايوجد أي عدد طبيعي مربعه يساوي 250 . **0.5**

التمرين الثاني : (6 نقاط)

1) * إحداثيات كل نقطة من النقط B ، C ، E ، F ، H ثم I و J .

$B(2 , 0 ,0)$ ، $C(2 ,4 0)$ ، $E(0 , 0 ,2)$ ، $F(2 , 0 , 2)$ ، $H (0 , 4 ,2)$

I منتصف [AF] : $I (1 , 0 ,1)$ و $J(0 ,2 ,2)$ **نقطة**

* مركبات الشعاع $\overrightarrow{IJ}$ و الشعاع $\overrightarrow{JC}$: $\overrightarrow{IJ}(-1 , 2 , 1)$ و $\overrightarrow{JC}(2 , 2 , -2)$ **0.5**

* بما أن : $\overrightarrow{AF}(2 , 0 , 2)$ و $\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{IJ} = -2+0+2 = 0$ و $\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{JC} = 2\times2+0\times2+2\times(-2) = 0$

نستنتج أن $\overrightarrow{AF}$ عمودي على $\overrightarrow{IJ}$ وعمودي على $\overrightarrow{JC}$ فهو شعاع ناظم للمستوي (IJC) **0.75**

* المستوي (IJC) يشمل النقطة C و $\overrightarrow{AF}$ شعاع ناظمي له معادلته تكتب

$2(x-2) + 0(y-4) +2(z-0) =0$ أي $x + z = 2$ **0.5**

النقط B ، C ، E ، H تنتمي إلى المستوي (IJC) لأن إحداثيات كل نقطة من هذه النقط تحقق

المعادلة $x + z = 2$ فعلا : $2 + 0 = 2 + 0 = 0 + 2 = 0 + 2 = 2$ **0.5**

2) (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $MB^2 + MC^2 + ME^2 + MH^2 = 48$

* نفرض $M(x , y , z)$. لدينا :

$$MB^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4$$

$$MC^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 20$$

$$ME^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4$$ **نقطة**

$$MH^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 4z + 20 .$$

نستنتج أن النقطة M تنتمي إلى (Γ) إذا وفقط إذا :

$4x^2+4y^2+4z^2-8x-16y-8z+48=48$ أي $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=0$ **0.25**

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=0$ تكافئ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$ **0.25**

(Γ) سطح الكرة التي مركزها النقطة $\omega(1\,,2\,,1)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$ **0.25**

* إحداثيات مركز ثقل المثلث IJC هي : $\left(\frac{x_I+x_J+x_C}{3}\,,\frac{y_I+y_J+y_C}{3},\frac{z_I+z_J+z_C}{3}\right)$

بما أن $\frac{x_I+x_J+x_C}{3}=\frac{1+0+2}{3}=1$ و $\frac{y_I+y_J+y_C}{3}=\frac{0+2+4}{3}=2$ و $\frac{z_I+z_J+z_C}{3}=\frac{1+2+0}{3}=1$

نستنتج أن مركز ثقل المثلث IJC هي النقطة ω **0.25**

* نصف القطر و إحداثيات مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمستطيل EBCH .

بما أن المثلث EHC قائم في H فإن قطر (γ) يساوي طول الوتر EC ومركزها منتصف [EC]

بما أن $EC=\sqrt{(2-0)^2+(4-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ نستنتج أن نصف قطر (γ) يساوي $\sqrt{6}$ **0.5**

و إحداثيات مركزها : $\left(\frac{2+0}{2}\,,\frac{4+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)$ أي $(1\,,2\,,1)$ وهي النقطة ω .

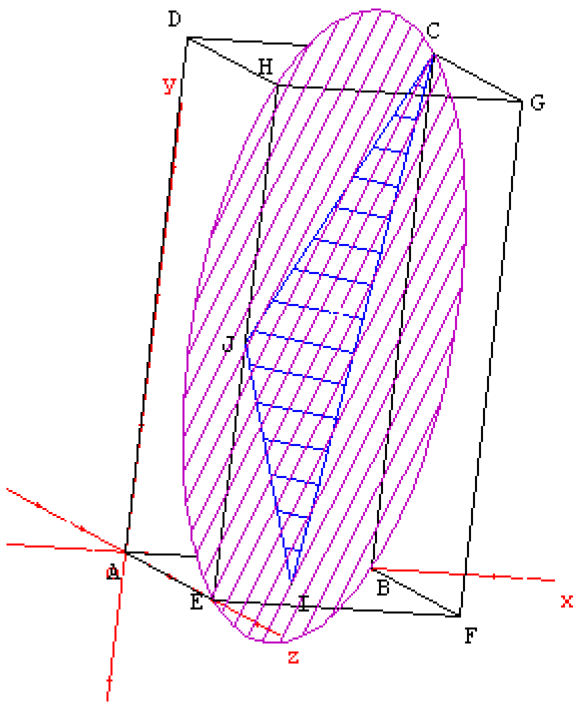
* تمثيل ديكارتي للدائرة (γ) :

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6\\ x+z=2\end{cases}$$ **0.25**

لأن كل نقطة من (γ) تبعد عن المركز ω بنفس المسافة $\sqrt{6}$ و نقط (γ) تنتمي إلى المستوي (IJC)

(لأن ثلاث نقط من (γ) تنتمي إلى المستوي (IJC) وهي B ، C ، E) .

إليك الرسم للتوضيح (غير مطلوب في التمرين)



التمرين الثالث : (3.5 نقطة) :

1) حل المعادلة ذات المجهول z : $z^2+z+1=0$:

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=3i^2$ و $z'=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z''=\bar{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{j}$ **0.5**

2) $|j|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ و $\arg(j)=\frac{2\pi}{3}$ نستنتج أن : $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $\frac{1}{j}=\bar{j}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ **0.5**

3) * M' صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$ تعني أن :

$z'-0=e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ نستنتج أن : $z'=\frac{1}{j}z$. **0.5**

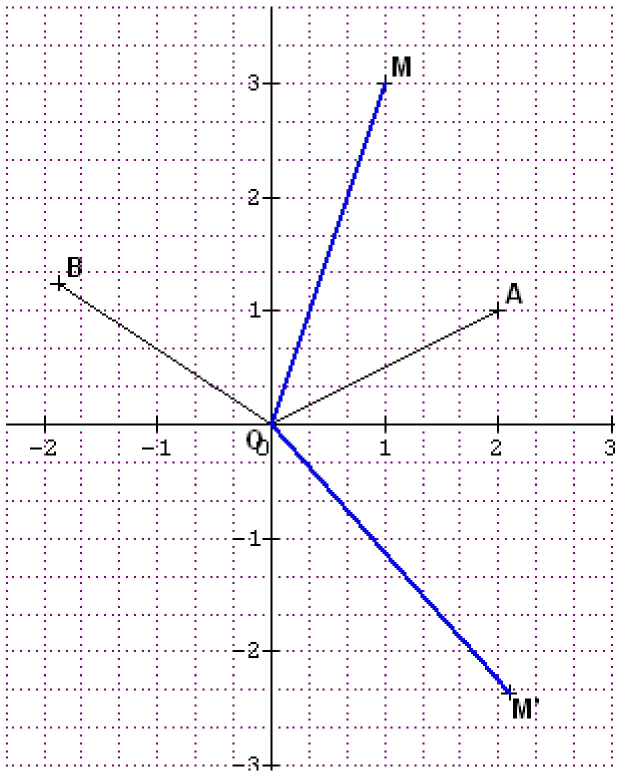
* الشكل الجبري العدد $\frac{z-\beta}{z'-\alpha}$: (نفرض $z'-\alpha\neq0$ أي $z-\beta\neq0$)

$$\frac{z-\beta}{z'-\alpha}=\frac{z-\beta}{\frac{1}{j}z-\alpha}=\frac{z-\beta}{\frac{z-\alpha j}{j}}=\frac{z-\beta}{\frac{z-\beta}{j}}=(z-\beta)\times\frac{j}{(z-\beta)}=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ **0.5**

* $\left|\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right|=|j|=1$ و $\arg\left(\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right)=\arg(j)=\frac{2\pi}{3}$ **0.5**

$\left|\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right|=1$ تكافئ $\frac{BM}{AM'}=1$ و $\arg\left(\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right)=\frac{2\pi}{3}$ تكافئ $\left(\overrightarrow{AM'}\,;\,\overrightarrow{BM}\right)=\frac{2\pi}{3}$ **0.5**

* الرسم : **0.5**



التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء الأول : φ الدالة العددية المعرفة على **R** كمايلي : $\varphi(x)=2(x^2+1).e^{-x}-1$

1) * لما x يؤول إلى ∞- فإن e^{-x} يؤول إلى ∞ + و $2(x^2+1)$ يؤول إلى ∞ +

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$ **0.25**

* لما x يؤول إلى ∞+ فإن e^{-x} يؤول إلى 0 و $2(x^2+1)$ يؤول إلى ∞ + ، حالة عدم التعيين .

$\varphi(x)=2(x^2+1).e^{-x}-1=2\dfrac{x^2+1}{e^x}-1=2\left(\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{1}{e^x}\right)-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1$ **0.5**

* دراسة اتجاه تغير الدالة φ : الدالة φ قابلة للاشتقاق على **R** . من أجل كل عدد حقيقي x من **R**

$\varphi'(x)=2\left(2x\times e^{-x}+(x^2+1).(-e^{-x})\right)=2e^{-x}\left(2x-x^2-1\right)=-2\left(x-1\right)^2e^{-x}$ **0.5**

$\varphi'(x)=0$ تكافئ $(x-1)^2=0$ أي $x=1$ ومهما يكن x من **R** : $\varphi'(x)\le 0$

الدالة φ متناقصة على **R**. **0.5**

جدول تغيرات φ : **0.25**

x	- ∞	1	+∞
$\varphi'(x)$	-	0	-
$\varphi(x)$	+∞	↘	-1

2) * نبين أن المعادلة φ (x) = 0 تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال [2 ;3]

الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على [2 ;3] ،

$\varphi(2)=2\left(2^2+1\right)e^{-2}-1\approx 0.35$ ، $\varphi(3)=2\left(3^2+1\right)e^{-3}-1\approx -0.004$ بما أن $\varphi(3)\le 0\le\varphi(2)$

حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة φ (x) = 0 تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال [2 ;3] **0.5**

بما أن $\varphi(2.9)\approx 0.035$ فإن α ينتمي إلى المجال [2,99 ;3] . **0.25**

* جدول إشارة φ (x) : **0.25**

x	- ∞	α	+∞
$\varphi(x)$	+	0	-

الجزء الثاني : $f(x)=4x.e^{-x}$ ، $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

1) * المنحنيين (C_f) و (C_g) يشملان مبدأ المعلم O لأن $f(0)=4\times 0.e^{-0}=0$ و $g(0)=\dfrac{2\times 0}{0^2+1}=0$ **0.25**

* معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة o.

الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(x) = 4\left(1\times e^{-x} + x\left(-e^{-x}\right)\right) = 4(1-x)e^{-x}$ ومنه

$f'(0) = 4(1-0)e^{-0} = 4$ معادلة المماس تكتب : y = 4x . **0.5**

* معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة o.

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g'(x) = \dfrac{2\left(x^2+1\right) - 2x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ ومنه

$g'(0) = \dfrac{2(1-0)}{(0+1)^2} = 2$ معادلة المماس تكتب : y = 2x . **0.5**

2) * نبين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) - f(x) = \dfrac{-2x\varphi(x)}{x^2+1}$

مهما يكن العدد الحقيقي x من **R** :

0.25 $$g(x) - f(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 4xe^{-x} = \frac{2x - \left(x^2+1\right)4xe^{-x}}{x^2+1} = \frac{-2x\left(2\left(x^2+1\right)e^{-x} - 1\right)}{x^2+1} = \frac{-2x\varphi(x)}{x^2+1}$$

* دراسة إشارة g(x) – f(x) : **0.5**

x	- ∞		0		α		+∞
$\varphi(x)$		+		+	0	-	
-2x		+	0	-		-	
$-2x\varphi(x)$		+	0	-	0	+	

* الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g).

المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقطتين O مبدأ المعلم و النقطة التي إحداثياتها (α , 0) .

لما x ينتمي إلى أحد المجالين] - ∞ ; 0 [أو] α ; + ∞ [فإن (C_g) أعلى (C_f).

لما x ينتمي إلى] 0 ; α [فإن (C_g) أسفل (C_f). **0.5**

3) * الدالة h حيث $h(x) = \ln(x^2+1) + (4x+4).e^{-x}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على **R**

مهما يكن العدد الحقيقي x من **R** :

0.5 $$h'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + 4e^{-x} + (4x+4).\left(-e^{-x}\right) = \frac{2x}{x^2+1} - 4xe^{-x} = g(x) - f(x)$$

نستنتج أن h دالة أصلية للدالة g – f على **R**

* مساحة الحيز المستوي المضلل في الرسم : نسمي S هذه المساحة

$$S = \int_0^{\alpha}\left(f(x) - g(x)\right)dx = -\left[h(x)\right]_0^{\alpha} = -\left[\ln\left(\alpha^2+1\right) + (4\alpha+4)e^{-\alpha} - 4\right] = 4 - \ln\left(\alpha^2+1\right) - (4\alpha+4)e^{-\alpha}$$

قيمة مقربة لـــ S : بأخذ $\alpha \approx 2.9$ نجد $S \approx 1u.a \approx 4cm^2$. **0.5+ 0.5**

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1) باستعمال طريقة هورنر (أو القسمةالاقليدية أو المطابقة) نبين أن $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$

	3	0	-11	48
-3	0	-9	27	-48
0	3	-9	16	0

نستنتج أن : $3n^3-11n+48=(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)$ أي $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$. **0.5**

2) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^3-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم. :

بما أن $3n^3$ و $9n$ و 16 أعداد طبيعية يكفي أن نبين أن $3n^2-9n+16\succ 0$ لذلك نحسب المميز

بما أن $\Delta=9^2-4\times3\times16=-111$ ، $\Delta\prec 0$ ومعامل n^2 موجب نستنتج أن $3n^2-9n+16\succ 0$. **0.5**

3) * نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n اكبر أو يساوي 2 : $PGCD\left(3n^3-11n\,,\,n+3\right)=PGCD(48\,,\,n+3)$

يكفي أن نبين كل قاسم مشترك للعددين $3n^3-11n$ و $n+3$ كذلك قاسم مشترك للعددين $n+3$ و 48 .

أولا : يكون العدد $3n^3-11n$ طبيعيا إذا كان $n\left(3n^2-11\right)\succ 0$ أي $n^2\succ\frac{11}{3}$ أي $n\geq 2$.

إذا كان d قاسما مشتركا للعددين $3n^3-11n$ و $n+3$ فإنه يقسم العدد $3n^3-11n-(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)$

أي يقسم العدد 48 . **0.5**

عكسيا كل قاسم مشترك d للعددين $n+3$ و 48 يقسم كذلك العدد $(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)-48$ أي يقسم

العدد $3n^3-11n$. **0.5**

نستنتج أن : $PGCD\left(3n^3-11n\,,\,n+3\right)=PGCD(48\,,\,n+3)$

* مجموعة قواسم العدد 48 : نسمي D مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 : بماأن : $48=2^4\times3$ فإن

عدد قواسم العدد 48 يساوي 10 نستنتج أن : $D=\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$. **0.5**

* مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ طبيعيا.

يكون العدد $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ طبيعيا إذا كان $n\geq 2$ و $n+3$ قاسما للعدد $3n^3-11n$ ، أي $n+3$ قاسما

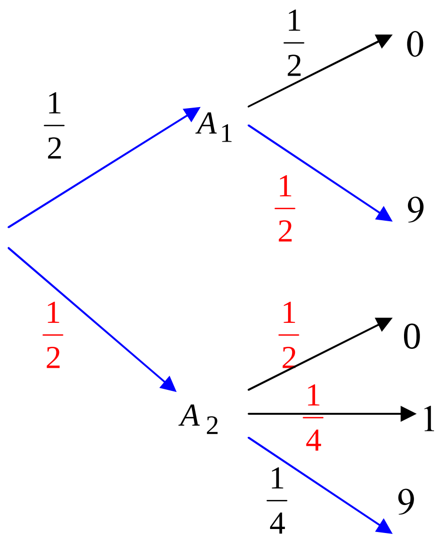
مشتركا لـــ $n+3$ و $3n^3-11n$ حتى يتحقق ذلك يكفي أن يكون $n+3$ قاسما للعدد 48 . **0.5**

نستنتج أن $n+3$ ينتمي إلى D و منه n ينتمي إلى $\{3,5,9,13,21,45\}$ (لاننس أن $n\geq 2$) . **0.5+ 0.5**

ملاحظة : يمكن استعمال الشكل $\frac{3n^3-11n}{n+3}=3n^2-9n+16-\frac{48}{n+3}$

التمرين الثاني : (5نقاط)

1) * شجرة الاحتمالات :



نقطة

* احتمال الحادثة A " العدد N يساوي 2009 " (اللون الأزرق) : $p(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ 0.5

* احتمال أن تكون القريصة المسحوبة من الوعاء A_1 علما أن العدد N يساوي 2009.

نحسب $p(A_1/A)$ نعلم أن : $p(A_1/A)=\frac{p(A_1\cap A)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}$ نقطة

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع أرقام العدد N

* القيم الممكنة للمتغير X هي 2 ، 3 ، 11 0.5

2 تعني N =2000 ، 3 تعني N = 2001 و 11 تعني N = 2009 .

$p(X=2)=p(N=2000)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ، $p(X=3)=p(N=2001)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$p(X=11)=p(A)=\frac{3}{8}$ 1.5

نستنتج قانون احتمال المتغير X :

α	2	3	11
P(X=α)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

الأمل الرياضي : $E(X)=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{8}+11\times\frac{3}{8}=\frac{44}{8}=\frac{11}{2}$. 0.5

التمرين الثالث : (4 نقاط ونصف) a عدد حقيقي موجب تماما

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(4z^2-a^2\right)\left(2z-\sqrt{3}ai\right)=0$

المعادلة المعطاة تكافئ : $(2z-a)(2z+a)\left(2z-\sqrt{3}ai\right)=0$

تكافئ : $z=\frac{a}{2}$ أو $z=-\frac{a}{2}$ أو $z=\frac{\sqrt{3}}{2}ai$ نقطة

2) * الشكل الأسي للعدد : $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_A}$

$z_A-z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}ai-\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ و $z_C-z_A=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ai=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ نستنتج أن

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_A}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{1}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$ 0.5

* الدوران R الذي يحول A إلى B ويحول C إلى A فقيس زاويته يساوي قيس $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right)$

بما أن $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right)=\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_A}\right)$ نستنتج أن قيس زاوية الدوران R تساوي $\frac{2\pi}{3}$. 0.5

* تحقق أن مركز الدوران R ينطبق مع مركز ثقل المثلث ABC . نسمي ω هذا المركز

بما أن الدوران R الذي يحول A إلى B ويحول C إلى A فأن AC = AB (تقايس)

نستنتج أن المثلث ABC متقايس الساقين وبالتالي نقطة تقاطع المحاور تنطبق مع مركز ثقل المثلث ABC

من جهة أخرى ωA =ωB و ωA =ωC لأن B صورة A و A صورة C بالدوران R

نستنتج أن ω هي نقطة تقاطع محور القطعة [AB] و محور القطعة [AC] فهي تنطبق مع مركز ثقل المثلث المتقايس الساقين ABC . نقطة

طريقة ثانية : حساب لاحقة ω أي $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$ ثم التحقق أن ωA =ωB =ωC .

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2+MB^2+MC^2=2a^2$

* التحقق أن A ، B و C تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

$$AA^2+AB^2+AC^2=2AB^2=2\left|z_B-z_A\right|^2=2\left|-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ai\right|^2=2a^2$$

$BA^2+BB^2+BC^2=AB^2+BC^2=2a^2$ و $CA^2+CB^2+CC^2=AC^2+BC^2=2a^2$ 0.5

- طبيعة (Γ) وعناصرها. نفرض M(x , y) نقطة من المستوي

$$MC^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y)^2 \text{ ، } MB^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y)^2 \text{ ، } MA^2 = (x)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

M تنتمي إلى (Γ) تكافئ $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

تكافئ $(x)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y)^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y)^2 = 2a^2$

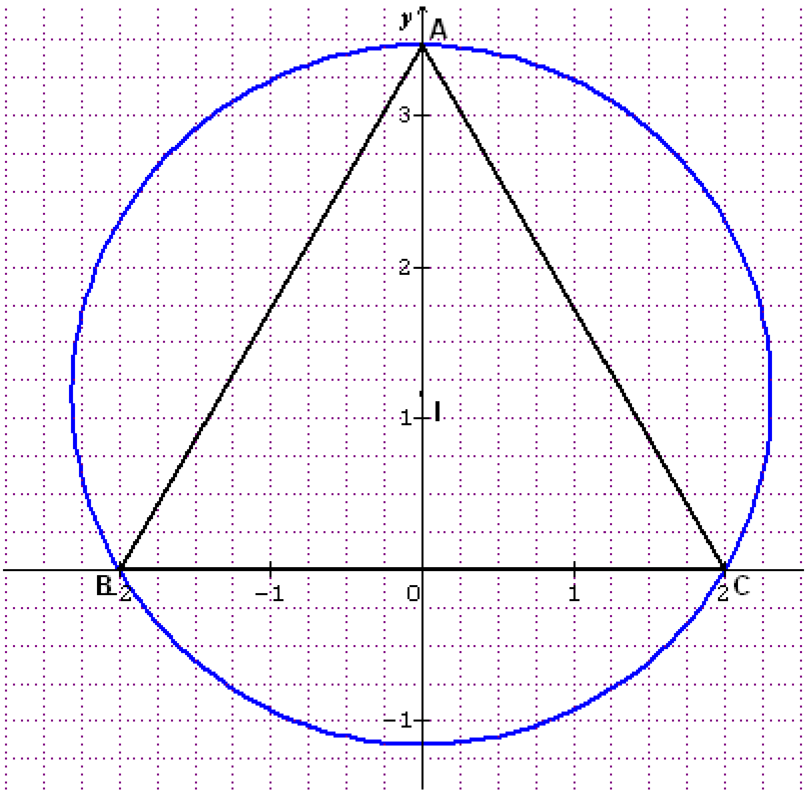
تكافئ $3x^2 + 3y^2 - \sqrt{3}ay = \frac{3}{4}a^2$ تكافئ $x^2 + y^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}ay = \frac{a^2}{4}$

تكافئ $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 = \frac{7a^2}{12}$ **0.5**

نستنتج أن (Γ) هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(0 \, ; \, \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$ (مركز ثقل المثلث ABC)

ونصف قطرها $\sqrt{\frac{7a^2}{12}} = a\sqrt{\frac{7}{12}}$

* الرسم :



0.5

التمرين الرابع : (6 نقاط ونصف)

f الدالة العددية المعرفة على $[0\,;+\infty[$ كما يأتي:

f(0)=0 ومن أجل x ينتمي إلى $]0\,;+\infty[$: $f(x) = x^2(1 - 2\ln(x))$

1) * نهاية f عند $+\infty$: لما x يؤول إلى $+\infty$ فإن x^2 يؤول إلى $+\infty$ و $1-2\ln(x)$ يؤول إلى $-\infty$
نستنتج أن لما x يؤول إلى $+\infty$ f(x) يؤول إلى $-\infty$ **0.25**

* حساب $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$: لدينا $\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2(1-2\ln(x))}{x}=x-2x\ln(x)$ ونعلم أن $\lim_{x\to0}x\ln(x)=0$
نستنتج أن $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$. **0.25**

التفسير الهندسي : الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و المماس عند هذه النقطة يوازي محور الفواصل **0.25**

* f جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
مهما يكن العدد x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=2x(1-2\ln(x))+x^2\left(-\frac{2}{x}\right)=2x-4x\ln(x)-2x=-4x\ln(x)$$ **0.5**

* دراسة إتجاه تغير الدالة f :

$f'(x)=0$ تكافئ x =0 أو ln(x) =0 أي x = 0 أو x = 1 . **0.25**

$f'(x)\succ0$ تكافئ $-\ln(x)\succ0$ أي $\ln(x)\prec0$ تكافئ $0\prec x\prec1$ **0.25**

$f'(x)\succ0$ تكافئ $x\succ1$ **0.25**

نستنتج أن f متزايدة على $]0;1[$ ومتناقصة على المجال $]1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f : **0.5**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2) * إحداثيات نقطتي تقاطع (C_f) مع محور الفواصل : هي النقط التي إحداثياتها (x ,0) حيث x حلا للمعادلة f(x) = 0 .

المعادلة f(x) = 0 تكافئ $x^2(1-2\ln(x))=0$ أي x =0 أو $1-2\ln(x)=0$ **0.25**

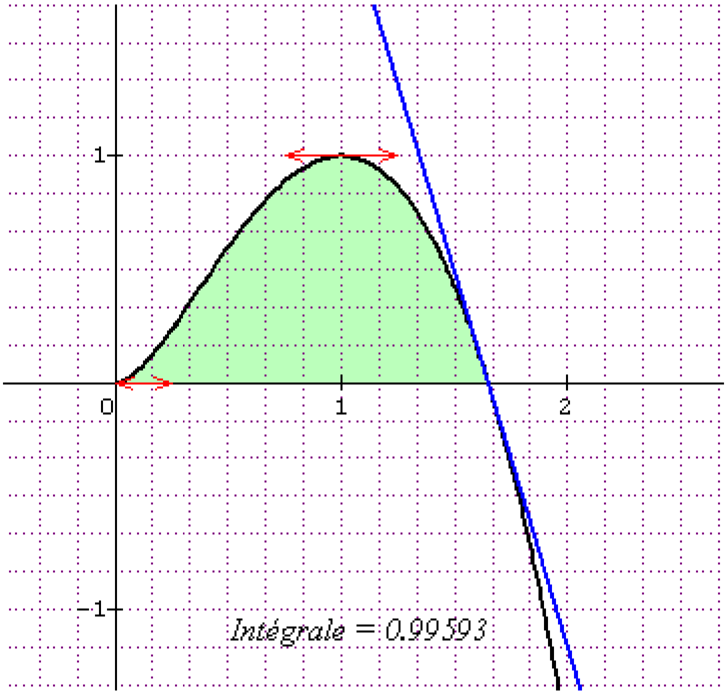
نستنتج أن x = 0 و $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$. نقطتي التقاطع هما : (0 , 0) و $(\sqrt{e},0)$. **0.5**

* معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$:

تكتب هذه المعادلة : $y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$

بما أن $f'(\sqrt{e})=-4\sqrt{e}\ln(\sqrt{e})=-4\sqrt{e}\times\frac{1}{2}=-2\sqrt{e}$ و $f(\sqrt{e})=0$ نستنتج أن $y=-2\sqrt{e}(x-\sqrt{e})$ **0.5**

* رسم المنحنى $\left(C_f\right)$ و المماس (d) .



0.75

3) * الدالة g المعرفة بـ $g(x)=\frac{x^3}{9}(5-6\ln(x))$ دالة أصلية للدالة f على $]0\,;+\infty[$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ ومن جل كل عدد حقيقي x من $]0\,;+\infty[$:

$$g'(x)=3\frac{x^2}{9}(5-6\ln(x))+\frac{x^3}{9}\left(-6\frac{1}{x}\right)=\frac{5x^2}{3}-\frac{2x^2}{3}-2x^2\ln(x)=x^2-2x^2\ln(x)$$

0.5

$$=x^2(1-2\ln(x))=f(x)$$

نستنتج أن الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$.

* حساب المساحة $S(\lambda)$: $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}}f(x)dx=[g(x)]_{\lambda}^{\sqrt{e}}=g(\sqrt{e})-g(\lambda)$

0.5

$$g(\lambda)=\frac{\lambda^3}{9}(5-6\ln(\lambda)) \text{ و } g(\sqrt{e})=\frac{\left(\sqrt{e}\right)^3}{9}\left(5-6\ln\left(\sqrt{e}\right)\right)=\frac{e\sqrt{e}}{9}\left(5-6\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2e\sqrt{e}}{9}$$

نستنتج أن : $S(\lambda)=\frac{2e\sqrt{e}}{9}-\frac{\lambda^3}{9}(5-6\ln(\lambda))$

0.5

* بما أن $\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^3}{9}(5-6\ln(\lambda))=\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{5\lambda^3}{9}-\frac{2\lambda^2}{3}\times\lambda\ln(\lambda)\right)=0-0=0$

نستنتج أن $\lim_{\lambda\to 0}S(\lambda)=\frac{2e\sqrt{e}}{9}u.a=\frac{2e\sqrt{e}}{9}\times 9cm^2=2e\sqrt{e}\ cm^2$

0.5