التصحيح وسلم التنقيط

التمرين الأول : (04 ن)

$(I \quad z_1 = 2i \quad ، \quad z_2 = \sqrt{3} + i \quad ، \quad z_3 = \sqrt{2}\,(1+i)$

1 – الشكل ألأسي z_1 : $z_1 = 2\, e^{\frac{\pi}{2} i}$ 0.25

– الشكل ألأسي z_2 : $z_2 = 2\, e^{\frac{\pi}{6} i}$ 0.25

2 – التحقق من أن : $z_1^{12} = z_2^{12}$

لدينا $z_1^{12} = z_2^{12} \Leftrightarrow \left(2\, e^{\frac{\pi}{2} i}\right)^{12} = \left(2\, e^{\frac{\pi}{6} i}\right)^{12}$

$\Leftrightarrow 2^{12}\, e^{6\pi i} = 2^{12}\, e^{2\pi i}$

$\Leftrightarrow 2^{12} = 2^{12}$

ومنه : $z_1^{12} = z_2^{12}$ 0.5

3 – كتابة الشكل المثلثي $\frac{z_3}{z_2}$: لدينا الشكل ألأسي $z_3 = \sqrt{2}\,(1+i)$ هو : $z_3 = 2\, e^{\frac{\pi}{4} i}$

إذن : $\frac{z_3}{z_2} = \frac{2\, e^{\frac{\pi}{4} i}}{2\, e^{\frac{\pi}{6} i}}$ ومنه : $\frac{z_3}{z_2} = e^{\frac{\pi}{12} i}$

ومنه الشكل المثلثي هو : $\frac{z_3}{z_2} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 0.5

* الشكل الجبري $\frac{z_3}{z_2}$: $\frac{z_3}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{\sqrt{3}+i}$ بعد الحساب نجد :

$\frac{z_3}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\, i$ 0.5

* استنتاج استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$: بمطابقة الشكل المثلثي مع الشكل الجبري نجد أن :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 0.25

$(II$ لتكن النقط A ; B ; C صور z_1 ; z_2 ; z_3 على الترتيب .

1 – O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC يعني أن : $OA = OB = OC$

لدينا : $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Leftrightarrow OA = OB = OC$

من الواضح أن : $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ إذن $OA = OB = OC$

ومنه فإن النقطة O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC 0.5

الأستاذ : شوتري خالد

2 – استنتاج قيسا لزاوية $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$: العدد $\frac{z_3}{z_2}$ يمكن كتابته على الشكل : $\frac{z_C - z_O}{z_B - z_O}$

ولدينا : $\arg\left[\frac{z_3}{z_2}\right] = \arg\left[\frac{z_C - z_O}{z_B - z_O}\right] = (\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$

ومنه وحسب الشكل المثلثي للعدد $\frac{z_3}{z_2}$ نستنتج أن قيس الزاوية $(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OC})$ هو $\frac{\pi}{12}$ 0.25

III) نفرض النقطة I ذات اللاحقة $z_I = -\sqrt{3} + 3i$

1 – حساب العدد $L = \frac{z_2 - z_I}{z_1 - z_I}$: لدينا $L = \frac{\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - 3i}{2i + \sqrt{3} - 3i}$

إذن $L = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{\sqrt{3} - i} \times \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i}$ بعد الحساب نجد : $\boxed{L = 2}$ 0.5

2 – نستنتج أن النقطة B صورة A بتحاكي مركزه النقطة I ونسبتـــه 2 .... 0.25

* العبارة التركيبية للتحاكي : $z' - z_I = 2(z - z_I)$

بتعويض $z_I = -\sqrt{3} + 3i$ والحساب نجد : $\boxed{z' = 2z + \sqrt{3} - 3i}$ 0.25

التمرين الثاني : (03 ن)

I) * تعيين شجرة الاحتمالات :

R ترمز للون الأحمر

V ترمز للون الأخضر

B ترمز للون الأبيض

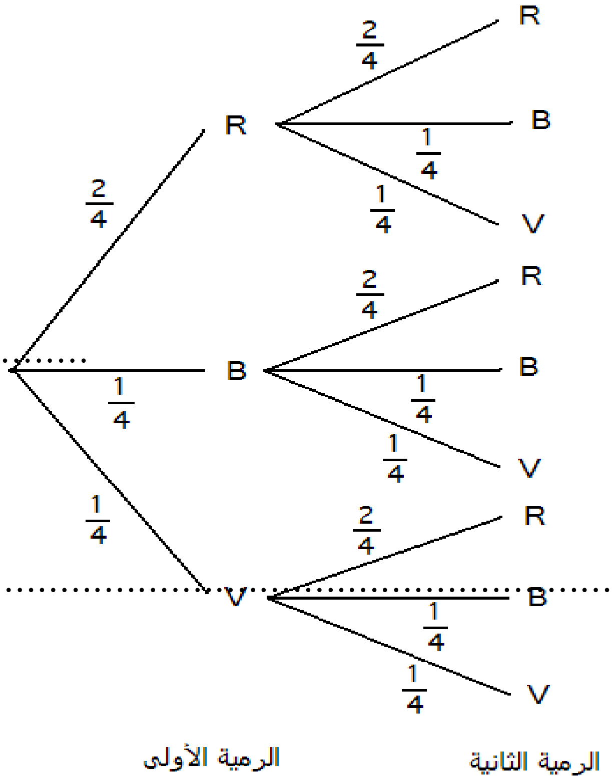
لتكن الحادثتين :

A << الوجهين الظاهرين لونهما أخضر >>

E << الوجهين الظاهرين لهما نفس اللون >>

* حساب احتمال الحادثة A :

0.5 ....



$$P(A) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

0.25 .... $= \boxed{\frac{1}{16}}$

* حساب احتمال الحادثة E :

$$P(E) = \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

0.25 .... $= \boxed{\frac{3}{8}}$

* حساب احتمال الحادثة A علما أن الحادثة E محققة : (احتمال شرطي)

$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$: إذن $P_E(A) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{3}{8}}$

بالحساب نجد : $P_E(A) = \boxed{\frac{1}{6}}$ 0.25

II) X متغير عشوائي يهتم بعدد مرات ظهور اللون الأحمر .

* قيم X هي : $\{0 ; 1 ; 2\}$ 0.25

* قانون احتمال X معرف كما يلي :

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{16}$	1
$x_i P_i$	0	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$	1

0.5 ....

* حساب الأمل الرياضياتي : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

$= \boxed{1}$ 0.5

III) نكرر التجربة 05 مرات متتابعة ومستقلة عن بعضها البعض .

الوضعية تجربة برنولي ذات مخرجين ، المخرج S << الوجهين الظاهرين لهما نفس اللون >>

والمخرج $\bar{S}$ << الوجهين الظاهرين ليس لهما نفس اللون >>

إذن : $P(S) = \frac{3}{8}$ ، $P(\bar{S}) = \frac{5}{8}$

بعد تكرار التجربة 05 مرات نتحصل على قانون ثنائي الحد ذو الوسطين $n = 5$ ، $P = \frac{3}{8}$

ومنه حساب احتمال الحصول مرتين فقط على الحادثة E هو : $P(X = 2)$ حيث :

$P(X = 2) = C_5^2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{5}{8}\right)^3$ بعد الحساب نجد أن : $P(X = 2) \approx \boxed{0.23}$ 0.5

الأستاذ : شوتري خالد

<u>التمرين الثالث</u> : (05 ن)

I) f دالة معرفة على المجال $]-2 ; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x+3}{x+2}$

* دراسة التغيرات : 1 النهايات : $\lim_{x \to -2^{>}} f(x) = \boxed{-\infty}$ 0.25

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{4}$ 0.25

2 – الاشتقاق : $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$ 0.5

3 – جدول التغيرات :

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f		$-\infty$ ↗	4

0.5 ....

* تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $I = [-1 ; 3]$ فإن : $f(x)$ تنتمي إلى I

من جدول التغيرات لدينا الدالة f متزايدة على المجال $I = [-1\,;3]$

إذن $-1 \le x \le 3 \Rightarrow f(-1) \le f(x) \le f(3)$

ومنه : $\Rightarrow -1 \le f(x) \le 3$

وعليه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $I = [-1\,;3]$ فإن : $f(x)$ تنتمي إلى I 0.25

* الرســم :

II) (u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

* تمثيل الحدود : $u_3\ ;\ u_2\ ;\ u_1\ ;\ u_0$

* التخمين : من التمثيل نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة إلى العدد 3 .... 0.5

* البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $-1 \le u_n \le 3$

– مرحلة التحقيق : من أجل $n = 0$ لدينا محققة $-1 \le 0 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le u_0 \le 3$ 0.25

– مرحلة الفرضية والبرهان : نفرض أن $-1 \le u_n \le 3$ ونبرهن $-1 \le u_{n+1} \le 3$

لدينا : $-1 \le u_n \le 3 \Leftrightarrow f(-1) \le f(u_n) \le f(3)$ لأن f متزايدة

ومنه $\Leftrightarrow -1 \le u_{n+1} \le 3$

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $-1 \le u_n \le 3$ 0.25

* تبيان أن (u_n) متزايدة : ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{4\,u_n + 3}{u_n + 2} - u_n$

وعليه $u_{n+1} - u_n = \frac{-\,u_n^{\,2} + 2\,u_n + 3}{u_n + 2}$ فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n^{\,2} - 2\,u_n - 3)}{u_n + 2}$

إذن : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}$

بما أن : $-1 \le u_n \le 3$ فإن $0 \le u_n + 1$ و $u_n - 3 \le 0$

نستنتج أن $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة 0.5

* حسب السؤالان السابقين فإن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة 0.25

* حساب النهاية : نحل المعادلة $u_{n+1} = u_n$ بالتعويض $\frac{4\,u_n + 3}{u_n + 2} = u_n$

بعد الحساب نجد أن $u_n = 3$ ، $u_n = -1$ ومنه : $lim_{n \to +\infty}\, u_n = 3$ 0.25

* **الرســم** : لتمثيل الحدود نرسم المستقيم $(\boldsymbol{D})$ ذو المعادلة $\boldsymbol{y = x}$ 0.25

التمرين الرابع : (08 ن)

$g(x) = e^{x} + 2 - x$ (I

* دراسة التغيرات : 1 – النهايات : $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$ 0.25

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(\frac{e^{x}}{x} + \frac{2}{x} - 1\right)\right] = \boxed{+\infty}$ 0.25

2 – الاشتقاق : $g'(x) = e^{x} - 1$ 0.5

* إشارة المشتق : لدينا أولا : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

ثانيا : $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 1$ 0.25

$\Leftrightarrow x > 0$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

0.5 ....

– من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) > 0$ 0.25

$f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ (II

* حساب المشتق : $f'(x) = 1 + e^{-x} - (x-1)e^{-x}$

$= 1 + e^{-x} - x\,e^{-x} + e^{-x}$

$= 1 + 2\,e^{-x} - x\,e^{-x}$

$= e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}} + 2 - x\right)$

$= e^{-x}\left(e^{x} + 2 - x\right)$

وهو المطلوب $= e^{-x} g(x)$ 0.75

* جدول التغيرات : لدينا من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) > 0$

حساب النهايات : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$ 0.25

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + x\,e^{-x} - e^{-x}\right) = \boxed{+\infty}$ 0.25

* جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

0.5 ....

* باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج:

أن لمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\propto$ يحقق $0 < \propto < \frac{1}{2}$ 0.5

<u>التفسير الهندسي</u> : نقول أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\propto$ 0.25

* تبيان أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} (x\,e^{-x} - e^{-x}) = \boxed{0}$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$ 0.25

* دراسة الوضعية : $f(x) - x = x\,e^{-x} - e^{-x}$

$$= (x-1)\,e^{-x}$$

إشارة الفرق $f(x) - x$ من إشارة $x - 1$

ومنه :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$
الوضعية	(Cf) تحت (D)	(D) يقطع (Cf) في النقطة (1 ; 1)	(Cf) فوق (D)

0.5 ....

* معامل التوجيه يساوي 1 : $f'(x) = 1 \iff e^{-x}(e^{x} + 2 - x) = 1$

$$\iff 1 + 2e^{-x} - x\,e^{-x} - 1 = 0$$

$$\iff e^{-x}(2 - x) = 0$$

$$\iff \boxed{x = 2}$$

ومنه يوجد نقطة وحيدة من المنحنى (C_f) يكون معامل توجيه المماس عندها مساويا 1 هي :

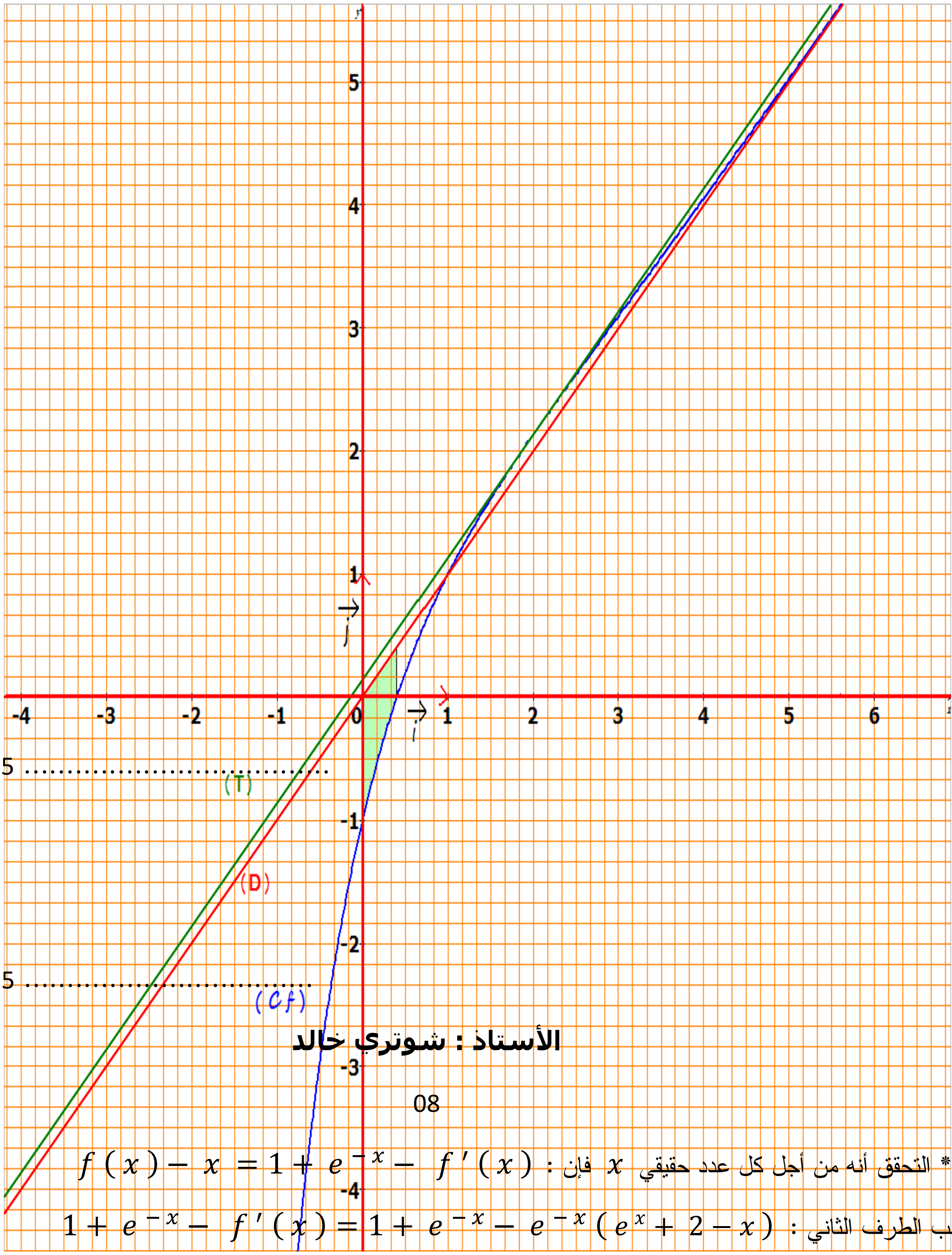
النقطة $A(2\,;\,2 + e^{-2})$ 0.5

الأستاذ : شوتري خالد

* كتابة معادلة المماس : $y = f'(2)(x-2) + 2 + e^{-2}$ مع $f'(2) = 1$

بعد التعويض والحساب نجد : $\boxed{y = x + e^{-2}}$ 0.25

* الرســـم :



0.25 ....

0.5 ....

III) * التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) - x = 1 + e^{-x} - f'(x)$

نحسب الطرف الثاني : $1 + e^{-x} - f'(x) = 1 + e^{-x} - e^{-x}(e^{x} + 2 - x)$

$$1 + e^{-x} - f'(x) = 1 + e^{-x} - 1 - 2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$1 + e^{-x} - f'(x) = -e^{-x} + xe^{-x}$$

$$1 + e^{-x} - f'(x) = e^{-x}(x - 1)$$

ومنه : $1 + e^{-x} - f'(x) = f(x) - x$ وهو المطلوب 0.5

* حساب المساحة : $A = \int_0^{\alpha} [x - f(x)]\,dx$

$A = \int_0^{\alpha} [-1 - e^{-x} + f'(x)]\, dx$: ومنه

$A = [-x + e^{-x} + f(x)]_0^{\alpha}$: إذن

$A = -\alpha + e^{-\alpha} + f(\alpha) - 1 - f(0)$

0.5 .... $\boxed{A = -\alpha + e^{-\alpha}}$

* تبيان أن $A = \dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}$

لدينا $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + (\alpha - 1)\, e^{-\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-\alpha} = \dfrac{-\alpha}{\alpha - 1}$

0.25 .... بالتعويض في المساحة نجد أن : $A = \dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}$

الأستاذ : شوتري خالد