الموضوع 2 : التصحيح

تخمين :

بملاحظة الشكل الذي يظهر على شاشة الحاسبة البيانية ، يمكن القول أن :

a) الدالة f متزايدة على المجال $[-3;2]$.

b) لما $x<0$ ، يكون (C_f) تحت محور الفواصل

و لما $x>0$ ، يكون (C_f) فوق محور الفواصل .

الجزء الأول :

1) f قابلة الإشتقاق على R (مجموع و جداء دوال قابلة الإشتقاق) و مهما كان x من R :

$$f'(x)=2xe^{x-1}+x^2e^{x-1}-x$$
$$=x\left[e^{x-1}(x+2)-1\right]$$

2) $g(x)=(x+2)e^{x-1}-1$.

◄ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ لأن : $\begin{cases} x+2\to+\infty \\ x-1\to+\infty \\ e^{x-1}\to+\infty \end{cases}$

◄ $$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{x-1}(x-1+3)-1$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{x-1}+3e^{x-1}-1$$
$$=-1$$

لأن $\begin{cases} x-1\to-\infty \\ e^{x-1}\to 0 \\ (x-1)e^{x-1}\to 0 \end{cases}$

g قابلة الإشتقاق على R و $g'(x)=e^{x-1}+(x+2)e^{x-1}$
$$=(x+3)e^{x-1}$$

$g'(x)$ له إشارة $x+3$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1	$\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

3) من جدول تغيرات g نرى أن : على المجال $]-\infty;-3[$ g سالبة تماما .

على المجال $[-3;+\infty[$: g مستمرة و متزايدة تماما من $\left(-e^{-1}-1\right)$ إلى $+\infty$. ومنه

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

بما أن $g(0,20)\approx -0,01<0$ و $g(0,21)\approx 0,003>0$ فإن $0,20<\alpha<0,21$

4) حسب ما سبق : $g(x)<0$ لما $x\in]-\infty;\alpha[$ و $g(x)>0$ لما $x\in]\alpha;+\infty[$.

بما أن $f'(x)=x.g(x)$ ، نستنتج تغيرات f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

هذا يبين لنا أن التخمين الأول خاطئا .

<u>الجزء الثاني :</u>

1) $g(\alpha)=0$ يعني $(\alpha+2)e^{\alpha-1}-1=0$ أي $(\alpha\neq-2)$ $e^{\alpha-1}=\dfrac{1}{\alpha+2}$

منه $f(\alpha)=\alpha^2e^{\alpha-1}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{\alpha^2}{\alpha-2}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{-\alpha^3}{2(\alpha-2)}$

2) $h(x)=\frac{-x^3}{2(x+2)}$. a) h قابلة الإشتقاق على $[0;1]$ و :

$$h'(x)=-\frac{3x^2(x+2)-x^3}{2(x+2)^2}=-\frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

مهما كان x من المجال $[0;1]$: $h'(x)<0$ و منه h متناقصة تماما على $[0;1]$.

b) نلاحظ أن $f(\alpha)=h(\alpha)$.

لدينا $0,20<\alpha<0,21$ و منه $h(0,21)<h(\alpha)<h(0,20)$ (h متناقصة)

و بالتالي $-0,00209<f(\alpha)<-0,00182$

3) a) $f(x)=0$ يعني $x^2\left(e^{x-1}-\frac{1}{2}\right)=0$

أي $x^2=0$ أو $e^{x-1}-\frac{1}{2}=0$

أي $x=0$ أو $e^{x-1}=\frac{1}{2}$

أي $x=0$ أو $x-1=\ln\frac{1}{2}$

أي $x=0$ أو $x=1-\ln 2$

(C_f) يقطع محور الفواصل عند نقطتين فاصلتهما 0 و $1-\ln 2$.

b) دراسة إشارة $f(x)$:

* $f(x)=0$ لما $x=0$ أو $x=1-\ln 2$

* $f(x)>0$ يعني $e^{x-1}-\frac{1}{2}>0$ أي $x-1>\ln\frac{1}{2}$

أي $x>1-\ln 2$

إذن لما $x \in]-\infty ;1-\ln 2[$ فإن $\left(C_f\right)$ يكون تحت محور الفواصل .

و لما $x \in]1-\ln 2;+\infty[$ فإن $\left(C_f\right)$ يكون فوق محور الفواصل .

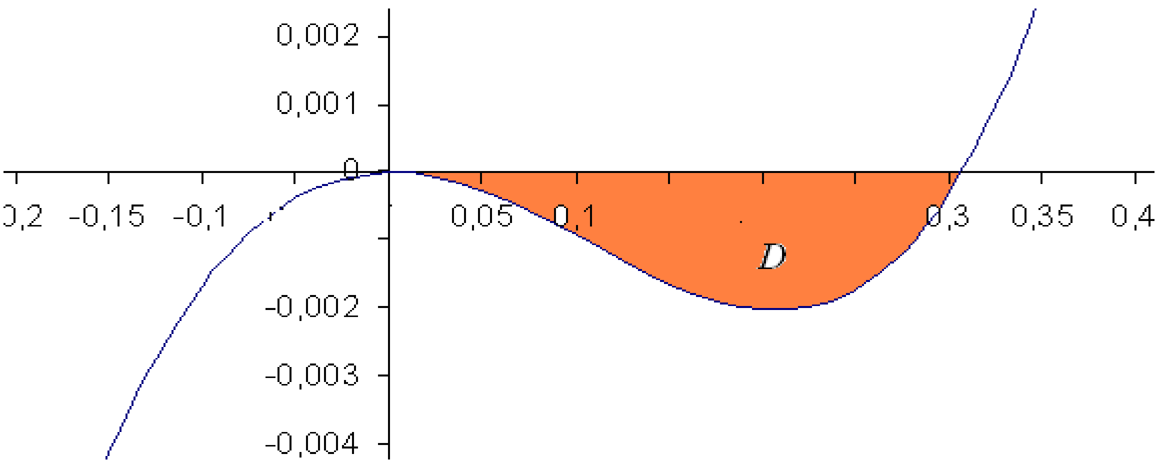
هذا يبين لنا أن التخمين الثاني كذالك خاطئا . هذا راجع إلى أن سلّم الوحدات الذي تستعمله الحاسبة البيانية كبير جدا بالنسبة لقيمة $f(\alpha)$ التي لا تظهر على الشاشة .

الجزء الثالث :

(1

x	-0,2	-0,15	-0,1	-0,05	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
$f(x)$	-0,008	-0,0041	-0,0017	-0,0004	0	-0,0003	-0,0009	-0,0016	-0,002	-0,0017	-0,0003	0,0027	0,0078

(2



الجزء الرابع

1) الدالة الأصلية للدالة : $x \to x^2e^x$ التي تنعدم عند 0 هي $I(x)=\int_0^x t^2e^t dt$.

نضع : $v'(t)=e^t$; $u(t)=t^2$ و منه $v(t)=e^t$; $u'(t)=2t$

$$I(x)=\left[t^2e^t\right]_0^x-\int_0^x 2te^t dt$$

نضع : $v'(t)=e^t \quad ; \quad u(t)=2t$ و منه $v(t)=e^t \quad ; \quad u'(t)=2$

$$I(x)=\left[t^2e^t\right]_0^x-\left(\left[2te^t\right]_0^x-\int_0^x 2e^t dt\right)=\left[t^2e^t-2te^t+2e^t\right]_0^x$$

و بالتالي : $I(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x-2$

2) لدينا $f(x)=x^2e^{x-1}-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{e}x^2e^x-\dfrac{x^2}{2}$

بما أن $x\to\left(x^2-2x+2\right)e^x$ دالة أصلية لـِ $x\to x^2e^x$ على R

فإن : $F(x)=\dfrac{\left(x^2-2x+2\right)e^x}{e}-\dfrac{x^3}{6}$

3) بما أن f سالبة على المجال $\left[0;1-\ln 2\right]$ فإن مساحة الحيز D (بوحدة المساحات) هي :

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{1-\ln 2}-f(x)dx=-\left[F(x)\right]_0^{1-\ln 2}\\&=-\left[F(1-\ln 2)-F(0)\right]\\&=-\left[\frac{\left[\left(1-\ln 2\right)^2-2(1-\ln 2)+2\right]e^{1-\ln 2}}{e}-\frac{\left(1-\ln 2\right)^3}{6}-\frac{2}{e}\right]\\&=\frac{2}{e}-\frac{\left(\ln 2\right)^3}{6}-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(لأن $e^{1-\ln 2}=\dfrac{e}{e^{\ln 2}}=\dfrac{e}{2}$) .

في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ وحسب الوحدات المطلوبة في النص ، يمكن القول أن :

$\left\|\vec{i}\right\|=20\ cm$ و $\left\|\vec{j}\right\|=1000\ cm$. وحدة المساحات تساوي إذن $20000\ cm^2$.

قيمة تقريبية لـ A هي :

$$A = 20\,000\left(\frac{2}{e} - \frac{(\ln 2)^3}{6} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\approx 6,96\, cm^2$$