الموضوع 3 : التصحيح

\1° $f_n(x)=\ln x+\dfrac{x}{n}-1$

a. $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=-\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{n}-1\right)=-1\end{array}\right\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{n}-1\right)=+\infty\end{array}\right\}$

الدالة f_n قابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ (مجموع دالتين قابلتين الاشتقاق على $]0;+\infty[$)

و $f_n'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{n}$. مهما كان x من $]0;+\infty[$ ، $f_n'(x)>0$.

الدالة f_n متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

b. الدالة f_n – قابلة الاشتقاق ، إذن مستمرة على $]0;+\infty[$.

– متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

– $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$.

– 0 ينتمي للمجال $]-\infty;+\infty[$

حسب نظرية القيم المتوسطة ، المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$.

$f_n(1)=\ln 1+\dfrac{1}{n}-1=\dfrac{1}{n}-1$. بما أن n عدد طبيعي غير معدوم فإن $n\geq 1$ أي

$\dfrac{1}{n}\leq 1$ و منه $f_n(1)\leq 0$.

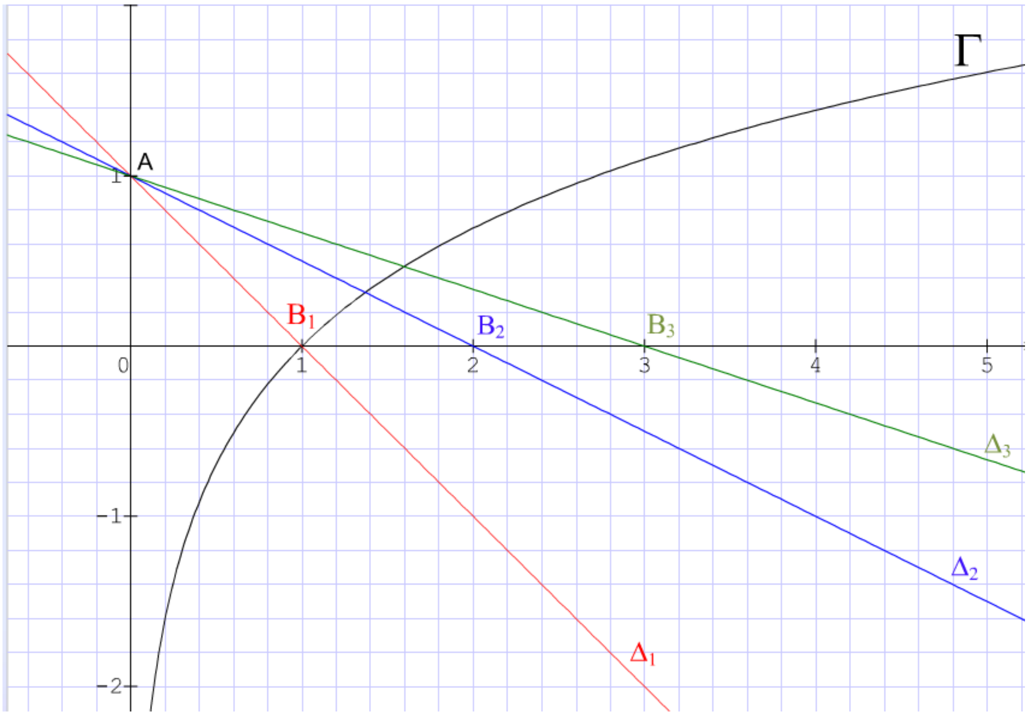
$f_n(e)=\ln e+\dfrac{e}{n}-1=1+\dfrac{e}{n}-1=\dfrac{e}{n}$ و منه $f_n(e)>0$.

نستنتج إذن أن $1 \leq \alpha_n < e$.

2°\ **a.** معامل توجيه المستقيم Δ_n هو : $\frac{y_{B_n} - y_A}{x_{B_n} - x_A} = \frac{0-1}{n-0} = -\frac{1}{n}$.

النقطة $A(0;1)$ تنتمي لـِ Δ_n . معادلة للمستقيم Δ_n هي إذن : $y = -\frac{x}{n} + 1$.

b.



c. نضع $\{M_n(x;y)\} = (\Gamma) \cap \Delta_n$. لدينا : $\begin{cases} y = \ln x \\ y = -\frac{x}{n} + 1 \end{cases}$

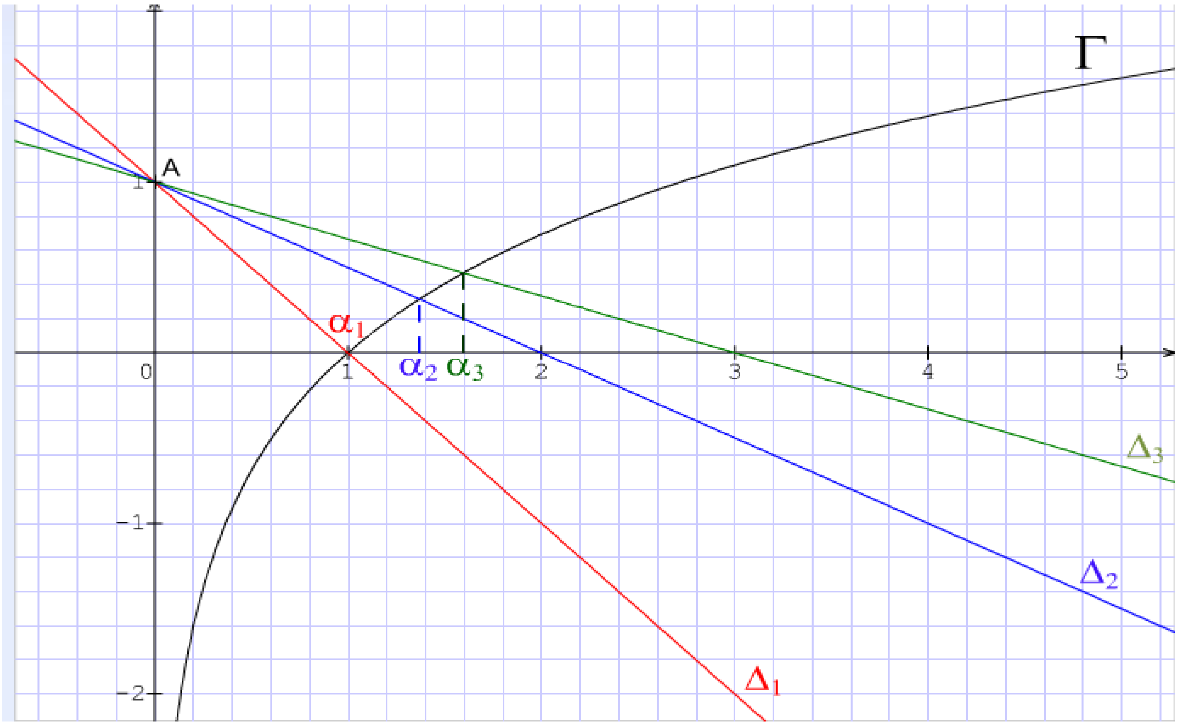
و منه $\ln x = -\frac{x}{n} + 1$ أي $\ln x + \frac{x}{n} - 1 = 0$

أي $f_n(x) = 0$

أي $x = \alpha_n$ (من السؤال 1°\ **b.**)

α_n هي فاصلة نقطة تقاطع (Γ) مع Δ_n .

.d



من الشكل ، يبدو أن $\alpha_1 = 1$. نتحقق من هذا بالملاحظة أن $B_1(1;0)$ ينتمي للمستقيم Δ_1 (تعريف Δ_n) و للمنني (Γ) (لأن $\ln 1 = 0$) .

من جهة أخرى ، يظهر من الشكل أن المتتالية (α_n) متزايدة .

°3\ **.a** نعلم أن $f_n(\alpha_n) = 0$ أي $\ln(\alpha_n) + \dfrac{\alpha_n}{n} - 1 = 0$

و منه $\ln(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n} + 1$

.b لدينا $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n) + \dfrac{\alpha_n}{n+1} - 1$ و $\ln(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n} + 1$

منه $$f_{n+1}(\alpha_n)=-\frac{\alpha_n}{n}+1+\frac{\alpha_n}{n+1}-1$$
$$=-\frac{\alpha_n}{n}+\frac{\alpha_n}{n+1}=\alpha_n\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)\alpha_n$$

بما أن α_n ينتمي إلى المجال $]1;e[$ (إذن $\alpha_n>0$) و n عدد طبيعي غير معدوم

فإن $f_{n+1}(\alpha_n)<0$.

c. مهما كان n عددا حقيقيا غير معدوما لدينا :

- $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0$ (تعريف α_n)
- $f_{n+1}(\alpha_n)<0$ (السؤال السابق)

بالفرق : $f_{n+1}(\alpha_{n+1})-f_{n+1}(\alpha_n)>0$ أي $f_{n+1}(\alpha_{n+1})>f_{n+1}(\alpha_n)$

بما أن الدالة f_{n+1} متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن $\alpha_{n+1}>\alpha_n$.

المتتالية (α_n) متزايدة تماما .

d. – المتتالية (α_n) متزايدة تماما .

– مهما كان n عددا حقيقيا غير معدوما ، فإن $\alpha_n<e$ ($\alpha_n\in[1;e[$).

منه ، المتتالية (α_n) متقاربة . (متزايدة و محدودة من الأعلى)

نسمي l نهايتها . نعلم ، من السؤال 3° **a.** أن $\ln(\alpha_n)=-\frac{\alpha_n}{n}+1$.

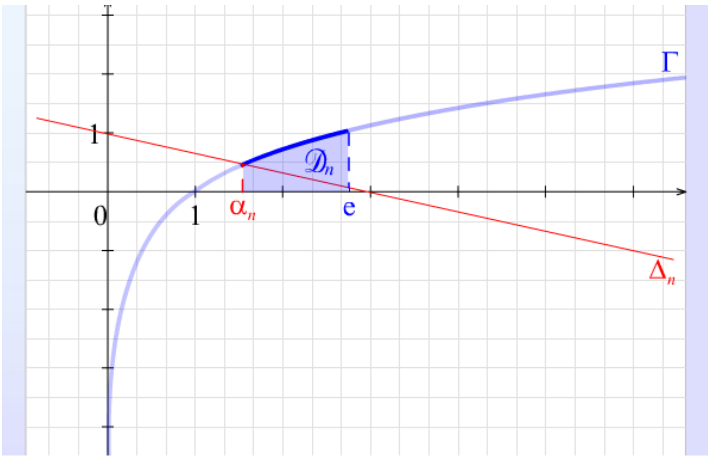
لدينا من جهة : $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=l$ و منه $\lim_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n)=\ln l$ (الدالة "ln" مستمرة)

من جهة أخرى ، $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\alpha_n}{n}+1\right)=1$ لأن $\left.\begin{array}{l} n\to+\infty \\ \alpha_n\to l \\ -\frac{\alpha_n}{n}\to 0 \end{array}\right\}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\alpha_n}{n}+1\right)$ فإن $\ln l=1$.

نستنتج أن $\ln l=\ln e$ أي $l=e$.

4°\ a. D_n الحيز للمستوي المحدد بـِ (Γ) و المستقيمات التي معادلتها $y=0$ ، $x=\alpha_n$ و $x=e$.



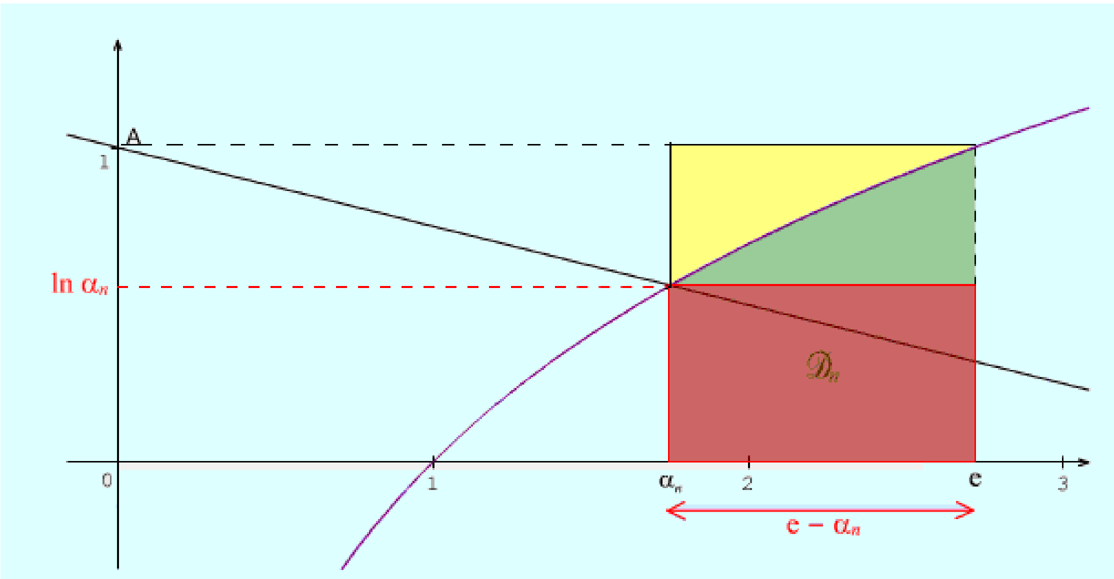
بما أن $\alpha_n>1$ ($\alpha_n\in[1;e[$) فإن الدالة "ln" مستمرة و موجبة تماما على $[\alpha_n;e]$. منه : $D_n=\int_{\alpha_n}^{e}\ln x dx$. نستعمل التكامل بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases}$ منه $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$ و $D_n=[x\ln x]_{\alpha_n}^{e}-\int_{\alpha_n}^{e}x\frac{1}{x}dx$

$$D_n = [x\ln x]_{\alpha_n}^{e} - \int_{\alpha_n}^{e} 1\,dx$$
$$= [x\ln x - x]_{\alpha_n}^{e}$$
$$= (e\ln e - e) - (\alpha_n \ln \alpha_n - \alpha_n)$$
$$= -\alpha_n \ln \alpha_n + \alpha_n = -\alpha_n\left(-\frac{\alpha_n}{n} + 1\right) + \alpha_n$$
$$= \frac{\alpha_n{}^2}{n}$$

$D_n = \dfrac{\alpha_n{}^2}{n}$ وحدة المساحات .

.b



مساحة D_n محصورة بين مساحتا مستطيلين :

الأول طوله $e-\alpha_n$ و عرضه $\ln\alpha_n$ إذن مساحته $(e-\alpha_n)\ln\alpha_n$

و الثاني طوله $e-\alpha_n$ و عرضه $\ln e = 1$ إذن مساحته $(e-\alpha_n)$

منه $\left(e-\alpha_n\right)\ln\left(\alpha_n\right)\le\frac{\alpha_n{}^2}{n}\le\left(e-\alpha_n\right)$.

c. حصر العدد $n\left(e-\alpha_n\right)$:

من السؤال السابق ، $\left(e-\alpha_n\right)\ln\left(\alpha_n\right)\le\frac{\alpha_n{}^2}{n}$ أي $n\left(e-\alpha_n\right)\le\frac{\alpha_n{}^2}{\ln\alpha_n}$

(ضرب الطرفين بالعدد الموجب $\frac{n}{\ln\alpha_n}$) .

كذلك من السؤال السابق ، $\frac{\alpha_n{}^2}{n}\le\left(e-\alpha_n\right)$ أي $\alpha_n{}^2\le n\left(e-\alpha_n\right)$

(ضرب الطرفين بـــِالعدد الطبيعي n) .

بالتالي ، لدينا $\alpha_n{}^2\le n\left(e-\alpha_n\right)\le\frac{\alpha_n{}^2}{\ln\alpha_n}$.

d. نحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(e-\alpha_n\right)$.

نعلم من السؤال 3° \ **d.** أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=e$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\alpha_n=\ln e=1$

منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n{}^2=e^2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n{}^2}{\ln\alpha_n}=\frac{e^2}{1}=e^2$

بما أن $\alpha_n{}^2\le n\left(e-\alpha_n\right)\le\frac{\alpha_n{}^2}{\ln\alpha_n}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(e-\alpha_n\right)=e^2$

(نظرية الحصر) .