حلّ -02-

1) **نبيّن أن النقط** A ، B **و** C **تعيّن مستو**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;0;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-4;-1)$.

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ تكافئ $\begin{cases}-2=k\\0=-4k\\-2=k\end{cases}$ أي $\begin{cases}k=-2\\k=0\\k=-2\end{cases}$

لا يمكن للعدد الحقيقي k أن يكون 0 و 2- في آن واحد إذن لا يوجد أي عدد k حيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ و منه $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}$ ، نستنتج أن النقط A ، B و C تعيّن مستو، هو المستوي (ABC) .

نبيّن أن هذا المستوي هو (P)

$2\times\mathbf{3}+\mathbf{2}-2\times\mathbf{6}+4=0$ إذن النقطة A تنتمي إلى (P).

$2\times\mathbf{1}+\mathbf{2}-2\times\mathbf{4}+4=0$ إذن النقطة B تنتمي إلى (P).

$2\times\mathbf{1}+\mathbf{2}-2\times\mathbf{4}+4=0$ إذن النقطة C تنتمي إلى (P).

النقط A ، B و C تنتمي إلى (P)، إذن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

2) (2-1) **نبيّن أن المثلث ABC قائم**

لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times1+0\times(-4)+(-2)\times(-1)=0$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان إذن المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان و منه المثلث ABC قائم في A .

(2-2) تمثيل و سيطي للمستقيم (D)

بصفة عامة $\vec{n}(a;b;c)$ يعامد المستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$.

لدينا $\vec{n}(2;1;-2)$ يعامد (P) و هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (D).

$M(x;y;z)\in(D)$ تكافئ $\overrightarrow{OM}=\lambda\vec{n}$ إذن $\begin{cases}x=2\lambda\\y=\lambda\\z=-2\lambda\end{cases}$ و $\lambda\in\mathbb{R}$

(3-2) حساب المسافة OK

لدينا $(OK)\perp(P)$ و $(OK)=(D)$ النقطة K تنتمي إلى (P) و إلى (D) إذن

$$\begin{cases} 2x+y-2z+4=0 \\ z=-2\lambda \\ y=\lambda \\ x=2\lambda \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 4\lambda+\lambda+4\lambda+4=0 \\ z=-2\lambda \\ y=\lambda \\ x=2\lambda \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \lambda=-\frac{4}{9} \\ z=-2\lambda \\ y=\lambda \\ x=2\lambda \end{cases}$$

و أخيرا $\begin{cases} x=-\frac{4}{9} \\ y=\frac{4}{9} \\ z=\frac{8}{9} \\ \lambda=-\frac{4}{9} \end{cases}$ نجد عندئذ إحداثيات K : $K\left(-\frac{8}{9};-\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

نستنتج حساب OK : $OK=\sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2}=\frac{4}{3}$

(4-2) حساب حجم رباعي الوجوه $OABC$

قاعدة رباعي الوجوه $OABC$ هي ABC و ارتفاعه [OK].

لدينا $AB^2=4+4=8$ إذن $AB=2\sqrt{2}$ و نجد كذلك $AC=3\sqrt{2}$.

مساحة المثلث ABC هي : $Aire(ABC)=\frac{AB\times AC}{2}=6cm^2$

نستنتج حجم رباعي الوجوه **OABC** : $Volume(OABC)=\frac{6\times OK}{3}=\frac{8}{3}cm^3$

3) (3-1) نبيّن أن G تنتمي إلى (OI)

" I مركز ثقل المثلث ABC" يعني " I مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;1)\}$ "

G هي مرجح الجملة $\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\}$.

نستعمل خواص المرجح (التجميعية): G هي مرجح الجملة $\{(O;3),(I;3)\}$

أي G هي منتصف [OI] إذن G تنتمي إلى المستقيم (OI) .

(2-3) حساب المسافة بين G و المستوي (P)

لدينا $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\right)$ إذن إحداثيات I هي $\begin{cases} x_I = \frac{8}{3} \\ y_I = \frac{2}{3} \\ z_I = 5 \end{cases}$

G هي منتصف [OI] إذن $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$ ، نستنتج إحداثيات G : $\begin{cases} x_G = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{1}{3} \\ z_G = \frac{5}{2} \end{cases}$

$2x + y - 2z + 4 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P)، المسافة بين G و المستوي (P)

هي $\frac{|2x_G + y_G - 2z_G + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$.