حلّ 02

1) كتابة z' على شكله الجبري

$(x;y)$ إحداثيا M إذن $z = x + iy$.

$$z' = \frac{x-3+iy}{x+i(y-2)} = \frac{[(x-3)+iy][x-i(y-2)]}{x^2+(y-2)^2} = \frac{x^2+y^2-3x-2y+i(2x+3y-6)}{x^2+(y-2)^2}$$

أي $$z' = \frac{x^2+y^2-3x-2y}{x^2+(y-2)^2} + i\frac{2x+3y-6}{x^2+(y-2)^2}$$

2) المجموعة (D)

يكون z' حقيقيا إذا و فقط إذا كان $\frac{2x+3y-6}{x^2+(y-2)^2} = 0$ أي $\begin{cases} 2x-3y+6 = 0 \\ x^2+(y-2)^2 \neq 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2x+3y-6 = 0 \\ (x;y) \neq (0;2) \end{cases}$.

المستقيم الذي معادلته $2x+3y-6 = 0$ يقطع محور الفواصل في النقطة $A(3;0)$ و محور التراتيب في النقطة $B(0;2)$.

(D) هو المستقيم (AB) المنقوص بالنقطة B التي لاحقتها $2i$.

3) المجموعة (Γ)

يكون z' تخيليا صرفا إذا و فقط إذا كان $\frac{x^2+y^2-3x-2y}{x^2+(y-2)^2} = 0$ **أي** $\begin{cases} x^2+y^2-3x-2y = 0 \\ x^2+(y-2)^2 \neq 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x^2+y^2-3x-2y = 0 \\ (x;y) \neq (0;2) \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2 = \frac{13}{14} \\ (x;y) \neq (0;2) \end{cases}$

(Γ) هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{3}{2};1\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{\frac{13}{14}}$ منقوصة بالنقطة B التي لاحقتها $2i$.

((Γ) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا النقطة B).

4) التفسير الهندسي لـ: $|z'|$ و $Arg(z')$

M، A و B هي على الترتيب صورّ z، 3 و $2i$ ؛ إذن لاحقة $\overrightarrow{AM}$ هي $z-3$ و لاحقة $\overrightarrow{BM}$ هي $z-2i$. نستنتج:

- $|z'| = \frac{AM}{BM}$
- $Arg(z') = Arg\left(\frac{z-3}{(z-2i)}\right) = Arg(z-3) - Argz(z-2i)$ إذن

$$Arg(z') = (\vec{i};\overrightarrow{AM}) - (\vec{i};\overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})$$

استنتاج نتيجة السؤال 1) : يكون z' حقيقيا إذا و فقط إذا كان $Arg(z') = k\pi$ **et** $k \in \mathbb{Z}$ **أي** $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}) = k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$ ؛ إذن M تنتمي إلى المستقيم (AB) المنقوص بالنقطة B.

استنتاج نتيجة السؤال 2) : يكون z' تخيليا صرفا إذا و فقط إذا كان $Arg(z') = k\frac{\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ أي $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}) = k\frac{\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ ؛ إذن M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا النقطة B).