حلّ 03

من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $V_n = n\frac{\pi}{3}$ و $z_n = U_n e^{iV_n} = U_n\left(\cos V_n + i\sin V_n\right)$ أي $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$.

1) $z_n \in \mathbb{R}$ إذا و فقط إذا كان $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$ أي $\begin{cases}\frac{n\pi}{3} = k\pi\\ k \in \mathbb{Z}\end{cases}$ أي $\begin{cases}n = 3k\\ k \in \mathbb{Z}\end{cases}$

إذن $z_n \in \mathbb{R}$ يكافئ n مضاعف 3.

2) لاحقة M_0 هي $z_0 = 1$.

لاحقة M_1 هي $\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

لاحقة M_2 هي $-\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8} = z_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

لاحقة M_3 هي $-\frac{1}{8} = z_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$

لاحقة M_4 هي $-\frac{1}{32} + i\frac{\sqrt{3}}{32} = z_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

(3

- $OM_n = |z_n| = u_n$ و $OM_{n+1} = |z_{n+1}| = U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$
- $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|U_{n+1}e^{iV_{n+1}} - U_n e^{iV_n}\right|$

مع $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$ و $V_{n+1} = V_n + \frac{\pi}{3}$ إذن $M_nM_{n+1} = \left|\frac{1}{2}U_n e^{i\left(V_n + \frac{\pi}{3}\right)} - U_n e^{iV_n}\right|$

$$M_nM_{n+1} = \left|U_n e^{iV_n}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)\right| = U_n \times \left|e^{iV_n}\right| \times \left|\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right|$$

$M_nM_{n+1} = U_n\left|\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right|$ لأن $\left|e^{iV_n}\right| = 1$

بماأن $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

فإن $M_nM_{n+1} = U_n\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}}$ أي $M_nM_{n+1} = U_n\frac{\sqrt{3}}{2}$

- نلاحظ أن $OM_n^2 = OM_{n+1}^2 + M_nM_{n+1}^2$ ، إذن OM_nM_{n+1} مثلث قائم في M_{n+1} .

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = |z_{n+1} - z_n|$.

$a_n = M_nM_{n+1}$ إذن $a_n = U_n \frac{\sqrt{3}}{2}$.

بماأن $a_{n+1} = U_{n+1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}U_n\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}a_n$ فإن (a_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $a_0 = U_0\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

الأساس $\frac{1}{2}$ ينتمي إلى $]-1;1[$ إذن $\lim_{n \to +\infty} (a_n) = 0$.