C.N.I.I.P.D.T.I.C.E

حلّ 04

الجزء الأول

1) $2^3+2(2)^2-16=0$ إذن 2 حل للمعادلة (I).

بمأن 2 حل لـ: $P(z)=z^3+2z^2-16$ فإنه يمكن تحليل $P(z)$: $P(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$

و $(z-2)(az^2+bz+c)=z^3+2z^2-16=$ يكتب أيضا :

$z^3+2z^2-1=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c......(*)$.

تكون المساواة $(*)$ محققة من أجل كل عدد مركب z إذا و فقط إذا كان :

$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=2 \\ c-2b=0 \\ -2c=-16 \end{cases}$ أي (I) $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=8 \end{cases}$ تكتب عندئذ $(z-2)(z^2+4z+8)=0$.

(2

أ) حل المعادلة (I)

$(z-2)(z^2+4z+8)=0$ تكافئ $z=2$ أو $z^2+4z+8=0$.

مميز z^2+4z+8 هو $\Delta=-16$ أي $\Delta=4i^2$. المعادلة $z^2+4z+8=0$ تقبل حلين $-2+2i$ و $-2-2i$.

المعادلة (I) تقبل ثلاثة حلول : $2\,;\,-2+2i\,;\,-2-2i$.

ب) الشكل ألأسي

- $2=2e^{i2\pi}$
- $|-2+2i|=2\sqrt{2}$

و $-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ إذن $\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ ؛ $Arg(-2+2i)\equiv$

$-2+2i=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

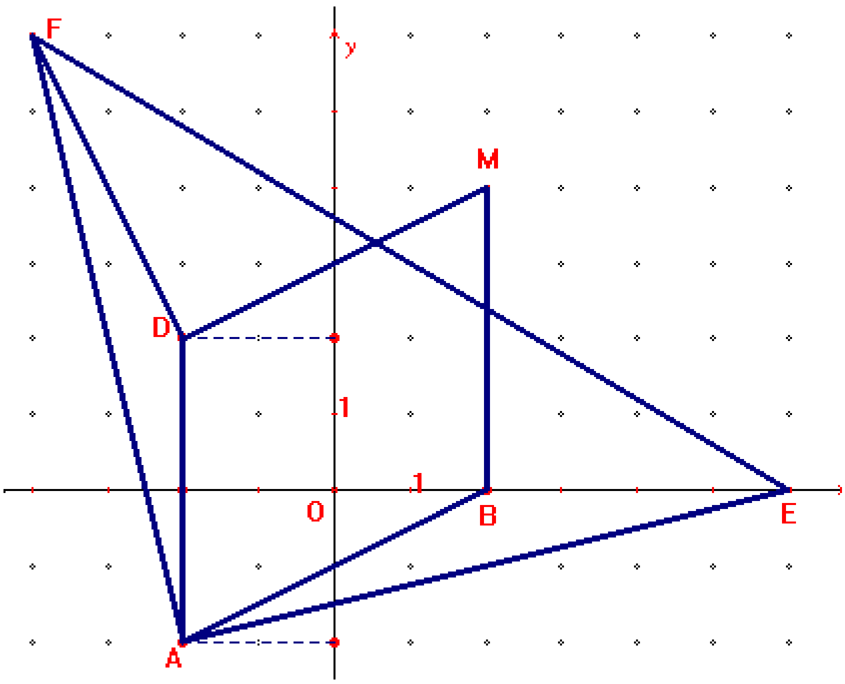
- $|-2-2i|=2\sqrt{2}$

و $-2-2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ إذن $\frac{5\pi}{4}[2\pi]$ ؛ $Arg(-2-2i)\equiv$

$-2+2i=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$

الجزء الثاني

1) و 2) $ABMD$ متوازي أضلاع يكافئ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DM}$ أي $z_B - z_A = z_M - z_D$ أي $z_M = (-2+2i) + 2 - (-2-2i)$ إذن $z_M = 2+4i$.



3) (1-3)

• E هي صورة M بالدوران الذي مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ إذن $z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_B)$ أي $z_E = 2 - i(2+4i-2)$ أي $z_E = 6$.

• F هي صورة M بالدوران الذي مركزه D و زاويته $\frac{\pi}{2}$ إذن $z_F - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_D)$ أي $z_F = -2+2i+i(2+4i+2-2i)$ أي $z_F = -4+6i$.

(2-3) انظر الشكل السابق

4) $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-4+6i+2+2i}{6+2+2i} = \frac{-2+8i}{8+2i} = \frac{i(8+2i)}{8+2i} = i$

إذن $z_F - z_A = i(z_E - z_A)$ أي $z_F - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_A)$ و هذا يبيّن أن F هي صورة E بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$، نستنتج أن المثلث AEF قائم في A و متقايس الساقين.

5) المثلث AEF قائم في A و متقايس الساقين ، إذن $IA = IE = IF$ و $\left(\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IF}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

نسمي r الدوران الذي مركزه I و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، لدينا $r(A) = F$ و $r(E) = A$.

لاحقة I هي $z_I = \frac{1}{2}\left(z_E + z_F\right)$ أي $z_I = 1 + 3i$.

صورة النقطة B بالدوران r هي النقطة B' التي لاحقتها $z_{B'}$ حيث $z_{B'} - z_I = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_B - z_I\right)$

أي $z_{B'} = 1 + 3i - i(2 - 1 - 3i) = -2 + 3i$ أي $z_{B'} = -2 + 3i$.

إذن $r(B) = D$. صورة المثلث EBA بالدوران r هي المثلث ADF .