C.N.I.I.P.D.T.I.C.E

حلّ – 06

1)

$$z^k=\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)=\cos\left(\frac{2k\pi}{7}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{7}-2\pi\right)$$

$$z^k=\cos\left(\frac{2(k-7)\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2(k-7)\pi}{7}\right)=z^{k-7}$$

2) $\overline{T}=\overline{z^3+z^5+z^6}=\overline{z^3}+\overline{z^5}+\overline{z^6}$

بماأن $z^k=z^{k-7}$ **فإن** $\overline{z^k}=z^{7-k}$ **إذن** $\overline{T}=\overline{z^3}+\overline{z^5}+\overline{z^6}=z^4+z^2+z=S$ **.**

3)

$$\mathrm{Im}(S)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$$

- $\sin\frac{2\pi}{7}>0$ **لأن** $\sin\frac{2\pi}{7}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- $\sin\frac{4\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$ لأن الدّالة $\sin$ متزايدة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

إذن : $\mathrm{Im}(S)>0$.

4)

- $S+T=z+z^2+z^4+z^3+z^5+z^6$

$$S+T=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=z\,\frac{1-z^6}{1-z}$$

و بماأن $z^7=1$ أي $z^6\times z=1$ فإن $z^6=\frac{1}{z}$ إذن $S+T=z\,\frac{1-\frac{1}{z}}{1-z}=z\,\frac{\frac{z-1}{z}}{1-z}=-1$.

- $ST=\left(z+z^2+z^4\right)\left(z^3+z^5+z^6\right)$

$$ST=z^4+z^6+z^7+z^5+z^7+z^8+z^7+z^9+z^{10}$$

و بماأن $z^7=1$ فإن $\begin{cases} z^8=z^7\times z=z \\ z^9=z^7\times z^2=z^2 \\ z^{10}=z^7\times z^3=z^3 \end{cases}$

إذن $ST=z^4+z^6+1+z^5+1+z+1+z^2+z^3$

أي $ST=3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ و منه $ST=3+S=3-1=2$

(1

- **حل المعادلة** $x^2-(S+T)x+ST=0$

المميز هو $\Delta=(S+T)^2-4ST=S^2+T^2+2ST-4ST$:

$$\Delta=S^2+T^2-2ST=(S-T)^2$$

الحلان هما : $x_1 = S$ و $x_2 = T$.

● **حساب** S **و** T

المعادلة $x^2 - (S+T)x + ST = 0$ تكافئ $x^2 + x + 2 = 0$.

نحل المعادلة $x^2 + x + 2 = 0$: مميزها هو $\Delta = -7$ أي $\Delta = \left(i\sqrt{7}\right)^2$

الحلان هما $x' = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ و $x'' = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

لدينا إذن $\{S;T\} = \left\{\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2};\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right\}$ ، نستنتج من السؤال الثالث أن $\begin{cases} S = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2} \\ T = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$