حل-07-

(1

- لدينا $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

إذن $\left|(1+iz)^3\right|\times|1-i\tan\alpha|=\left|(1-iz)^3\right|\times|1+i\tan\alpha|$

و بماأن $\begin{cases}|1-i\tan\alpha|=|1+i\tan\alpha|\\ \left|(1+iz)^3\right|=|1+iz|^3\\ \left|(1-iz)^3\right|=|1-iz|^3\end{cases}$ فإن $|1+iz|^3=|1-iz|^3$ أي $|1+iz|=|1-iz|$.

- نضع z = x+i y ، العلاقة $|1+iz|=|1-iz|$ تصبح $|1+i(x+iy)|=|1-i(x+iy)|$ أي

$|(1-y)+ix|=|(1+y)-ix|$ أي $(1-y)^2+x^2=(1+y)^2+x^2$ إذن $y=0$

و منه $z=x$ أي $z\in\mathbb{R}$.

(2 $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=\dfrac{1+i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos(-\alpha)+i\cos(-\alpha)}=\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}=e^{i2\alpha}$

3)المعادلة $(*)$ تكافئ $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

و بماأن $\begin{cases}\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=e^{i2\alpha}\\ \dfrac{1+iz}{1-iz}=\dfrac{1+i\tan\beta}{1-i\tan\beta}=e^{i2\beta}\end{cases}$ فإن $(*)$ تكتب $\left(e^{i2\beta}\right)^3=e^{i2\alpha}$ أي $e^{i6\beta}=e^{i2\alpha}$

و نستنتج أن $\begin{cases}6\beta=2\alpha+2k\pi\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ أي $\begin{cases}\beta=\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{k\pi}{3}\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

من أجل $k=0$: $\beta=\dfrac{\alpha}{3}$

من أجل $k=1$: $\beta=\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\alpha+\pi}{3}$

من أجل $k=2$: $\beta=\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\alpha+2\pi}{3}$

حلول المعادلة $(*)$ هي : $z_1=\tan\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)$ ، $z_2=\tan\left(\dfrac{\alpha+\pi}{3}\right)$ ، $z_3=\tan\left(\dfrac{\alpha+2\pi}{3}\right)$.