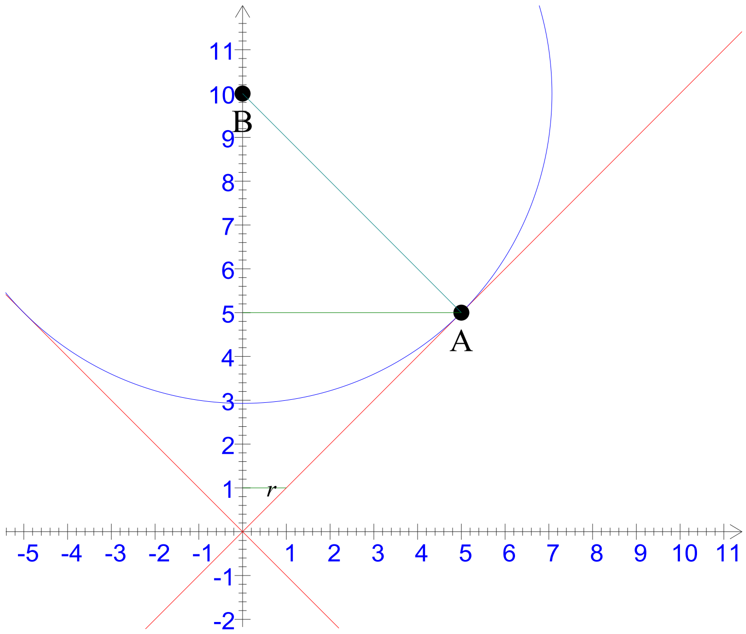
حلّ – 05 -



1) المستقيم (OA) يمس الدّائرة إذا و فقط إذا كان (OA) يعامد المستقيم (AB) أي بعبارة أخرى إذا و فقط إذا الشعاع $\vec{OA}$ يعامد الشعاع $\vec{AB}$.

لدينا $A\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$ إذن $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}$ و $\vec{OA}\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}$ و منه $\vec{AB}\,.\vec{OA}=-5\times5+5\times5=0$

نستنتج أن $\vec{OA}$ يعامد $\vec{AB}$ إذن المستقيم (OA) يمس الدّائرة (C) .

2) (2-1) $M(x;y;z)$ نقطة من (Γ) و $H(0,0;z)$ مسقطها العمودي على (Oz)،

لدينا $\frac{HM^2}{OH^2}=\tan^2\frac{\pi}{4}$ إذن $x^2+y^2=z^2$.

(2-2)معادلة الكرة التي مركزها B و نصف قطرها $AB=\sqrt{(-5)^2+5^2}=\sqrt{2\times5^2}=\sqrt{50}$

هي $x^2+y^2+(z-10)^2=50$.

نقطة $(x;y;z)$ M تنتمي إلى (S) و إلى (Γ) إذا وفقط إذا كان $(*)$... $\begin{cases} x^2+y^2+(z-10)^2=50 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$

المعادلة $(*)$ تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z^2+(z-10)^2=50 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z^2+z^2-20z+100=50 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ 2z^2-20z+50=0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z^2-10z+25=0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ (z-5)^2=0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z=5 \\ x^2+y^2=5^2 \end{cases}$

تقاطع (S) و (Γ) هو الدّائرة التي مركزها $\Omega(0;0;5)$ و نصف قطرها 5 المحتواة في المستوي الذي معادلته $z=5$.

3) الإحداثيات $(x;y;z)$ للنقط M تحقق $x^2+y^2=z^2$ (y ، x و z أعداد صحيحة نسبية) .

نستعمل الاستدلال بالخلف :

نفرض أن x فردي و y فردي ...... (I)

نضع $x=2k+1$ و $y=2k'+1$

المعادلة $x^2+y^2=z^2$ تصبح $(2k+1)^2+(2k'+1)^2=z^2$

أي $4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1=z^2$

أي $4(k^2+k'^2+k+k')+2=z^2$

نستنتج أن 2 يقسم z^2 . و إذا كان يقسم z^2 فإن 2 يقسم حتما z و 4 يقسم z^2 .

لا يمكن للعدد 4 أن يقسم z^2 لأن $\begin{cases} z^2=4\lambda+2 \\ \lambda=k^2+k'^2+k+k' \end{cases}$ أي z^2 ليس من الشكل $z^2=4\lambda$

و ذلك يشكل تناقضا ، إذن ما فرضناه في(I) غير صحيح .