

حل- 4 - :

الجزء الأول:

1. حساب احتمال سحب كرتين من لون أبيض.

نعرف الحادثة B : « سحب كرتين من لون أبيض »
مجموعة الإمكانات هي توفيقات ذات كرتين من بين $n+8$ كرة، منه عدد الحالات الممكنة هو:

$$C_{n+8}^2 = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$$

عدد الحالات المناسبة هو عدد التوفيقات ذات كرتين بيضاوين من بين n كرة بيضاء أي هو:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$P(B) = \frac{C_n^2}{C_{n+8}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)} \text{ منه}$$

$$P(n) = \frac{(n^2 - n + 26)}{(n+8)(n+7)} \text{ (أ) إثبات أن:}$$

نعرف الحادثتين R : « سحب كرتين حمرأوين »
و V : « سحب كرتين خضرأوين »

$$P(R) = \frac{C_5^2}{C_{n+8}^2} = \frac{20}{(n+8)(n+7)} \text{ إذن لدينا:}$$

$$P(V) = \frac{C_3^2}{C_{n+8}^2} = \frac{6}{(n+8)(n+7)} \text{ و}$$

نعلم أنّ الأحداث B، R، V منفصلة عن بعضها مثنى مثنى،
ومنه ينتج:

$$P(n) = P(B) + P(R) + P(V)$$

$$P(n) = \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)} + \frac{20}{(n+8)(n+7)} + \frac{6}{(n+8)(n+7)} \text{ أي}$$

$$(1) \dots\dots\dots P(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)} \text{ وبالتالي نجد:}$$

(ب) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n)$ وتفسير النتيجة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n) = 1 \text{ بالحساب المباشر نجد:}$$

تفسر هذه النتيجة على أنه إذا كان عدد الكرات البيضاء كبير بما فيه كفاية، فإننا ننتظر أن تكون نتيجة السحب هي الحصول على كرتين بيضاوين. وأن هذه الحادثة هي شبه مؤكدة.

الجزء الثاني:

لدينا $n = 4$

1. حساب $P(4)$.

يكفي لأجل هذا التعويض عن n بالعدد 4 في النتيجة (1) للسؤال 2 أ) من الجزء الأوّل

$$\text{فنجد } P(4) = \frac{19}{66}$$

أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي:

- " $X = 50$ " إذا تحصل اللاعب على كرتين من نفس اللون في كلا السحبين
($50 = -30 + 40 + 40$)
- " $X = 15$ " إذا تحصل اللاعب مرّة واحدة على كرتين من نفس اللون
($15 = -30 + 40 + 5$)
- " $X = -20$ " إذا تحصل اللاعب على كرتين من لونين مختلفين في كلا السحبين
($-20 = -30 + 5 + 5$)

ب) تعيين قانون الاحتمال للمتغير X .

لدينا فرضاً أن السحبين مستقلين عن بعضهما إذن ينتج:

$$P(X=50) = P(4) \times P(4) = \frac{19}{66} \times \frac{19}{66} = \frac{361}{4356} \quad \blacklozenge$$

$$P(X=15) = P(4) \times (1-P(4)) + (1-P(4)) \times P(4) \quad \blacklozenge$$

$$P(X=15) = 2P(4) \times (1-P(4)) = 2 \times \frac{19}{66} \times \frac{47}{66} = \frac{1786}{4356} \quad \text{ومنه}$$

$$P(X=20) = \frac{47}{66} \times \frac{47}{66} = \frac{2209}{4356} \quad \text{ومنه } P(X=20) = (1-P(4))^2 \quad \blacklozenge$$

ج) حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

$$E(X) = \sum_{k \in \{50, 15, 20\}} P(X=k) \cdot k \quad \text{لدينا:}$$

ومنه بالتعويض نجد:

$$E(X) = 50 \times \frac{361}{4356} + 15 \times \frac{1786}{4356} + 20 \times \frac{2209}{4356} = \frac{5}{33}$$